



Exercice 1 :

Etudier la continuité des fonctions suivantes en a :

$$1) \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{\cos(\pi x)}{2x-1} \text{ si } x < \frac{1}{2} \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \end{array} \right. \quad a = \frac{1}{2}$$

$$2) \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{\sin(4x^2-1)}{2x-1} \text{ si } x > \frac{1}{2} \\ f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{14}{3} \end{array} \right. \quad a = \frac{5}{2}$$

$$3) \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{\cos x - \sin(2x)}{\sqrt{1-4\sin^2(x)}} \text{ si } x \neq \frac{\pi}{6} \\ f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0 \end{array} \right. \quad a = \frac{\pi}{6}$$

Correction

$$1) \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{\cos(\pi x)}{2x-1} \text{ si } x < \frac{1}{2} \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \end{array} \right. \quad a = \frac{1}{2}$$

$$\text{On a : } \bullet \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{\cos(\pi x)}{2x-1}$$

$$\text{On pose : } t = 2x-1 \Rightarrow x = \frac{1+t}{2}$$

Alors : $x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^- \Rightarrow t \rightarrow 0^-$

$$\begin{aligned} \text{Et } \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x) &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\cos\left(\pi\left(\frac{1+t}{2}\right)\right)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\cos\left(\frac{\pi t}{2} + \frac{\pi}{2}\right)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{-\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{\frac{\pi t}{2}} \times \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) = -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Car $\lim_{X \rightarrow 0} \left(\frac{\sin X}{X} \right) = 1$

Donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}}$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} \left(\frac{\sin(4x^2 - 1)}{2x - 1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} \left(\frac{\sin(4x^2 - 1)}{4x^2 - 1} \times \frac{4x^2 - 1}{2x - 1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} \left(\frac{\sin(4x^2 - 1)}{4x^2 - 1} \times \frac{(2x - 1)(2x + 1)}{2x - 1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} \left(\frac{\sin(4x^2 - 1)}{4x^2 - 1} \times (2x + 1) \right) \end{aligned}$$

Et $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} \left(\frac{\sin(4x^2 - 1)}{4x^2 - 1} \right) = 1$; on pose ; $t = 4x^2 - 1$ alors $x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+ \Rightarrow t \rightarrow 0^+$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin X}{X} \right) = 1 ; \text{ d'autre part } \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} (2x+1) = 2$$

$$\text{Donc } \boxed{\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} f(x) = 2}$$

On conclut que f n'est pas continue en $\frac{1}{2}$; car $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x)$

$$2) \begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{2x+4} - 3\sqrt{2x-1} + 3}{\sqrt{2x+11} - \sqrt{2x-1} - 2} & \text{si } x > \frac{1}{2} \text{ et } x \neq \frac{5}{2} \\ f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{14}{3} \end{cases} \quad a = \frac{5}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Pour } x \neq \frac{5}{2} ; \text{ on a : } \frac{\sqrt{2x+4} - 3\sqrt{2x-1} + 3}{\sqrt{2x+11} - \sqrt{2x-1} - 2} &= \frac{(\sqrt{2x+4} - 3) - (3\sqrt{2x-1} - 6)}{(\sqrt{2x+11} - 4) - (\sqrt{2x-1} - 2)} \\ &= \frac{\left(\frac{2x-5}{\sqrt{2x+4}+3}\right) - 3(\sqrt{2x-1} - 2)}{\left(\frac{2x-5}{\sqrt{2x+11}+4}\right) - \left(\frac{2x-5}{\sqrt{2x-1}+2}\right)} \\ &= \frac{\left(\frac{2x-5}{\sqrt{2x+4}+3}\right) - 3\left(\frac{2x-5}{\sqrt{2x-1}+2}\right)}{\left(\frac{2x-5}{\sqrt{2x+11}+4}\right) - \left(\frac{2x-5}{\sqrt{2x-1}+2}\right)} \\ &= \frac{(2x-5)\left(\frac{1}{\sqrt{2x+4}+3}\right) - 3\left(\frac{1}{\sqrt{2x-1}+2}\right)}{(2x-5)\left(\frac{1}{\sqrt{2x+11}+4}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{2x-1}+2}\right)} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2x+4}+3}\right) - 3\left(\frac{1}{\sqrt{2x-1}+2}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{2x+11}+4}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{2x-1}+2}\right)} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow \frac{5}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{5}{2}} \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2x+4}+3}\right) - 3\left(\frac{1}{\sqrt{2x-1}+2}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{2x+11}+4}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{2x-1}+2}\right)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\frac{1}{6} - \frac{3}{4}}{\frac{1}{8} - \frac{1}{4}} \\
 &= \frac{-\frac{7}{12}}{-\frac{1}{8}} = \frac{14}{3} \quad \text{et } f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{14}{3}
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow \frac{5}{2}} f(x) = f\left(\frac{5}{2}\right)$$

D'où f est continue en $\frac{5}{2}$.

$$3) \begin{cases} f(x) = \frac{\cos x - \sin(2x)}{\sqrt{|1 - 4\sin^2(x)|}} & \text{si } x \neq \frac{\pi}{6} \\ f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0 \end{cases} \quad a = \frac{\pi}{6}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Pour } x \neq \frac{\pi}{6} ; \text{ on a : } f(x) &= \frac{\cos x - \sin(2x)}{\sqrt{|1 - 4\sin^2(x)|}} \\
 &= \frac{\cos x - 2\cos x \cdot \sin x}{\sqrt{|1 - 4\sin^2(x)|}} \\
 &= \frac{\cos x(1 - 2\sin x)}{\sqrt{|1 - 4\sin^2(x)|}} \\
 &= \frac{\cos x(1 - 2\sin x)}{\sqrt{|(1 - 2\sin x)(1 + 2\sin x)|}}
 \end{aligned}$$

$$\blacktriangleright \text{ si } x > \frac{\pi}{6} ; 1 - 2\sin x < 0 \Rightarrow |1 - 2\sin x| = -(1 - 2\sin x)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Donc } f(x) &= \frac{-\cos x \cdot |1 - 2\sin x|}{\sqrt{|(1 - 2\sin x)(1 + 2\sin x)|}} \\
 &= -\cos x \cdot \sqrt{\frac{1 - 2\sin x}{1 + 2\sin x}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D'o\grave{u} \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{6}\right)^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{6}\right)^+} \left(-\cos x \cdot \sqrt{\frac{1-2\sin x}{1+2\sin x}} \right) \\
 &= -\cos \frac{\pi}{6} \cdot \sqrt{\frac{1-2 \times \frac{\pi}{6}}{1+2 \times \frac{\pi}{6}}} = 0
 \end{aligned}$$

► si $x < \frac{\pi}{6}$; $1-2\sin x > 0 \Rightarrow |1-2\sin x| = (1-2\sin x)$

$$\begin{aligned}
 \text{Donc } f(x) &= \frac{\cos x \cdot |(1-2\sin x)|}{\sqrt{|(1-2\sin x)(1+2\sin x)|}} \\
 &= \cos x \cdot \sqrt{\frac{1-2\sin x}{1+2\sin x}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D'o\grave{u} \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{6}\right)^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{6}\right)^-} \left(\cos x \cdot \sqrt{\frac{1-2\sin x}{1+2\sin x}} \right) \\
 &= \cos \frac{\pi}{6} \cdot \sqrt{\frac{1-2 \times \frac{\pi}{6}}{1+2 \times \frac{\pi}{6}}} = 0
 \end{aligned}$$

Et $f(0) = 0$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{6}\right)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{6}\right)^+} f(x) = f(0)$$

Par suite f est continue en $\frac{\pi}{6}$.

Exercice 2 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}^*$

On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} f_n(x) = x^n \sin\left(\frac{a}{x^n}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

1) Montrer que la fonction f_n est continue en 0 .

2) Montrer que la fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}$

Correction

1) Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}^* ; \text{ on a : } \left| \sin\left(\frac{a}{x^n}\right) \right| \leq 1 \Leftrightarrow |x^n| \left| \sin\left(\frac{a}{x^n}\right) \right| \leq |x^n|$$
$$\Leftrightarrow \left| x^n \sin\left(\frac{a}{x^n}\right) \right| \leq |x^n|$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x^n| = 0 ; \text{ alors } \lim_{x \rightarrow 0} \left| x^n \sin\left(\frac{a}{x^n}\right) \right| = 0 ; \text{ et } f_n(0) = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = f_n(0)$$

Par suite f_n est continue en 0

2) Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$

Il faut prendre en compte le fait que $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle

La fonction $x \mapsto \frac{a}{x^n}$ est continue sur chacun des intervalles $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$

La fonction $x \mapsto \sin(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$; en particulier sur chacun des intervalles $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$

Donc la fonction $x \mapsto \sin\left(\frac{a}{x^n}\right)$ est continue sur chacun des intervalles $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$

Comme composée de deux fonctions continues sur chacun des intervalles $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$

D'autre part la fonction $x \mapsto x^n$ est continue sur $\mathbb{R}$; en particulier sur chacun des intervalles $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$

Par suite la fonction f_n est continue sur chacun des intervalles $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$

Comme produit de deux fonctions continues sur chacun des intervalles $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$

D'après la question 1) f_n est continue en 0 ; on conclut que f_n est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\text{On considère la fonction } f_n \text{ définie sur } \mathbb{R} \text{ par : } \begin{cases} f_n(x) = \frac{x^{n+3} - (n+2)x^2 + n+1}{-x^2 + 1} & \text{si } x > 1 \\ f_n(x) = \frac{(x^n + x^{n-1} + \dots + x) - 1}{nx - 2} & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

Déterminer les valeurs de n pour que la fonction f_n soit continue en 1.

Correction

Pour que f soit continue en 1 ; il faut que :

- La fonction $x \mapsto \frac{(x^n + x^{n-1} + \dots + x) - 1}{nx - 2}$ soit définie en 1 ; donc $n \times 1 - 2 \neq 0 \Rightarrow n \neq 2$
- que $x \mapsto x^{n+3} - (n+2)x^2 + n+1$ s'annule en 1 ; si non $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^{n+3} - (n+2)x^2 + n+1}{-x^2 + 1}$ serait infinie.

$$\begin{aligned} \text{Pour } x > 1 \text{ on a alors : } f_n(x) &= \frac{x^{n+3} - (n+2)x^2 + n+1}{-x^2 + 1} \\ &= \frac{(x^{n+3} - 1) - (n+2)x^2 + (n+2)}{-x^2 + 1} \\ &= \frac{(x-1)(x^{n+2} + x^{n+1} + \dots + 1) - (n+2)(x^2 - 1)}{-x^2 + 1} \\ &= \frac{(x-1)((x^{n+2} + x^{n+1} + \dots + 1) - (n+2)(x+1))}{-(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{(n+2)(x+1) - (x^{n+2} + x^{n+1} + \dots + 1)}{x+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \lim_{x \rightarrow 1^+} f_n(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{(n+2)(x+1) - (x^{n+2} + x^{n+1} + \dots + 1)}{x+1} \right) \\ &= \frac{(n+2)(1+1) - (1^{n+2} + 1^{n+1} + \dots + 1)}{1+1} \\ &= \frac{n+1}{2} \end{aligned}$$

D'autre part la fonction f_n est continue en 1ssi $\lim_{x \rightarrow 1^+} f_n(x) = f_n(1)$ et $f_n(1) = \frac{n-1}{n-2}$

$$\begin{aligned} \text{D'où } f_n \text{ est continue en 1} &\Leftrightarrow \frac{n+1}{2} = \frac{n-1}{n-2} \text{ et } n \in \mathbb{N}^* - \{2\} \\ &\Leftrightarrow n(n-3) = 0 \text{ et } n \in \mathbb{N}^* - \{2\} \\ &\Leftrightarrow \boxed{n=3} \end{aligned}$$

Exercice 4 :

On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f_n(x) = 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ f_n(x) = 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

Montrer que la fonction f_n n'est pas continue sur $\mathbb{R}$

Correction

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$; on distingue deux cas :

► $x_0 \in \mathbb{Q}$

On a : $f_n(x_0) = 1$

Et l'ensemble $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$; donc $(\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*)$ l'intervalle $]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[$ contient des nombres irrationnels t ; alors $|f_n(t) - f_n(x_0)| = 1 \geq \frac{1}{2}$

D'où $(\exists \varepsilon > 0)(\forall \alpha > 0)(\exists t \in \mathbb{R}) / |t - x_0| < \alpha$ et $|f_n(t) - f_n(x_0)| \geq \varepsilon$; on prend $\varepsilon = \frac{1}{2}$

Donc f_n n'est pas continue en $x_0 \in \mathbb{Q}$

► $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

On a : $f_n(x_0) = 0$

Et $(\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*)$ l'intervalle $]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[$ contient des nombres rationnels r ; alors

$$|f_n(r) - f_n(x_0)| = 1 \geq \frac{1}{2}$$

D'où $(\exists \varepsilon > 0)(\forall \alpha > 0)(\exists r \in \mathbb{R}) / |r - x_0| < \alpha$ et $|f_n(r) - f_n(x_0)| \geq \varepsilon$; on prend $\varepsilon = \frac{1}{2}$

Donc f_n n'est pas continue en $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

On conclut que f_n n'est pas continue sur $\mathbb{R}$

Exercice 5 :

Soient a et b des réels strictement positifs

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{a} E\left(\frac{b}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = \frac{b}{a} \end{cases}$$

Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; \left| f(x) - \frac{b}{a} \right| \leq \frac{|x|}{a}$

En déduire que la fonction f est continue en 0 .

Correction

On a pour tout $x \in \mathbb{R}^* : \frac{b}{x} - 1 < E\left(\frac{b}{x}\right) \leq \frac{b}{x}$

Alors si ► $x > 0$; on a : $\frac{x}{a} > 0$; donc :

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} \times \left(\frac{b}{x} - 1 \right) &< \frac{x}{a} \times E\left(\frac{b}{x}\right) \leq \frac{x}{a} \times \frac{b}{x} \Leftrightarrow \frac{b}{a} - \frac{x}{a} < \frac{x}{a} \times E\left(\frac{b}{x}\right) \leq \frac{b}{a} \\ &\Leftrightarrow -\frac{x}{a} < \frac{x}{a} \times E\left(\frac{b}{x}\right) - \frac{b}{a} \leq 0 \\ &\Rightarrow \left| f(x) - \frac{b}{a} \right| \leq \left| \frac{x}{a} \right| \end{aligned}$$

► $x < 0$; on a : $\frac{x}{a} < 0$; donc :

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} \times \frac{b}{x} &\leq \frac{x}{a} \times E\left(\frac{b}{x}\right) < \frac{x}{a} \times \left(\frac{b}{x} - 1 \right) \Leftrightarrow \frac{b}{a} \leq \frac{x}{a} \times E\left(\frac{b}{x}\right) < \frac{b}{a} - \frac{x}{a} \\ &\Leftrightarrow 0 \leq \frac{x}{a} \times E\left(\frac{b}{x}\right) - \frac{b}{a} < -\frac{x}{a} \\ &\Rightarrow \left| f(x) - \frac{b}{a} \right| \leq \left| \frac{x}{a} \right| \end{aligned}$$

Donc $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; \left| f(x) - \frac{b}{a} \right| \leq \left| \frac{x}{a} \right|$

Et comme $\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{x}{a} \right| = 0$; alors $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{b}{a}$ et comme $f(0) = \frac{b}{a}$

Donc f est continue en 0.

Exercice 6 :

Soient a et b des réels tels que $a < b$ et f une application de $[a; b]$ dans $[a; b]$

1- On suppose que pour tout $(x; y) \in [a; b]^2$ on a : $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$

a) Montrer que f est continue sur $[a; b]$.

b) Montrer que $(\exists c \in [a; b]) / f(c) = c$

2- On suppose maintenant que pour tout $(x; y) \in [a; b]^2$ on a : $|f(x) - f(y)| < |x - y|$

Montrer que $(\exists ! c \in [a; b]) / f(c) = c$

Correction

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $a < b$

1- a) Soit $x_0 \in [a; b]$; on a : $|f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0|$

Or $\lim_{x \rightarrow x_0} |x - x_0| = 0$; donc $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

D'où f est continue en tout $x_0 \in [a; b]$

Par suite f est continue sur $[a; b]$

b) On considère la fonction $g(x) = f(x) - x$

f est une application de $[a; b]$ dans $[a; b]$; donc $(\forall x \in [a; b]) ; a \leq f(x) \leq b$

D'où $f(x) - a \geq 0$ et $f(x) - b \leq 0$

Donc $f(a) - a \geq 0 \Rightarrow g(a) \geq 0$ et $f(b) - b \leq 0 \Rightarrow g(b) \leq 0$

Comme g est continue sur $[a; b]$ comme somme de deux fonctions continues ; alors d'après TVI ; $(\exists c \in]a; b[) / g(c) = 0$

Càd $(\exists c \in]a; b[) / f(c) = c$

2- On a pour tout $(x; y) \in [a; b]^2$ on a : $|f(x) - f(y)| < |x - y|$

D'après la question précédente $(\exists c \in]a; b[) / f(c) = c$

Supposons que c n'est pas unique ; alors : $(\exists c \in]a; b[) / f(c) = c$ et $(\exists c' \in]a; b[) /$

$f(c') = c'$; et on a : $(c; c') \in [a; b]^2 \Rightarrow |f(c) - f(c')| < |c - c'|$

$$\Rightarrow |c - c'| < |c - c'|$$

Ce qui est absurde donc c est unique ; donc : $(\exists ! c \in]a; b[) / f(c) = c$

Exercice 7 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Soit f une fonction continue sur $[0; 1]$ telle que : $f(0) = f(1)$

Montrer que $(\exists c_n \in [0; 1 - \frac{1}{n}]) / f(c_n) = f(c_n + \frac{1}{n})$

Correction

On considère la fonction g_n définie sur $[0; 1]$ par : $g_n(x) = f(x + \frac{1}{n}) - f(x)$

• La fonction $h : x \mapsto x + \frac{1}{n}$ est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $[0; 1 - \frac{1}{n}]$

• $h([0; 1 - \frac{1}{n}]) = [\frac{1}{n}; 1] \subset [0; 1]$

• La fonction $x \mapsto f(x)$ est continue sur $[0; 1]$

On conclut que la fonction $x \mapsto f\left(x + \frac{1}{n}\right)$ est continue sur $\left[0; 1 - \frac{1}{n}\right] \subset [0; 1]$

D'où la fonction $g_n(x)$ est continue sur $\left[0; 1 - \frac{1}{n}\right]$; or $\forall k \in \{0; 1; 2; \dots; n-1\}$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} g_n\left(\frac{k}{n}\right) &= \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n} + \frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \\ &= f\left(\frac{n}{n}\right) - f\left(\frac{0}{n}\right) \\ &= f(1) - f(0) = 0\end{aligned}$$

Alors la somme des valeurs de $g_n\left(\frac{k}{n}\right)$ avec $k \in \{0; 1; 2; \dots; n-1\}$ est nulle donc

nécessairement ils existent au moins deux valeurs $g_n\left(\frac{k_1}{n}\right)$ et $g_n\left(\frac{k_2}{n}\right)$ de signes opposés

D'après le TVI $\left(\exists c_n \in \left[\frac{k_1}{n}; \frac{k_2}{n}\right] \subset \left[0; 1 - \frac{1}{n}\right]\right) / g_n(c_n) = 0$

Par suite $\left(\exists c_n \in \left[0; 1 - \frac{1}{n}\right]\right) / f(c_n) = f\left(c_n + \frac{1}{n}\right)$

Exercice 8 :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que : $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 ; |f(x) - f(y)| \leq |\sin x - \sin y|$

1) Montrer que f est 2π - périodique.

2) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Correction

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 ; |f(x) - f(y)| \leq |\sin x - \sin y|$$

1) Pour $y = x + 2\pi$; on a : $|f(x) - f(x + 2\pi)| \leq |\sin x - \sin(x + 2\pi)|$

Et $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$; alors $f(x) - f(x + 2\pi) = 0 \Rightarrow f(x) = f(x + 2\pi)$

Donc f est 2π - périodique.

2) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$; on a : $|f(x) - f(x_0)| \leq |\sin x - \sin x_0|$

Et la fonction $x \mapsto \sin x$ est continue sur $\mathbb{R}$; alors $\lim_{x \rightarrow x_0} |\sin x - \sin x_0| = 0$

Donc $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

D'où f est continue en x_0 ; par suite elle est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

On considère la fonction f_n définie par : $f_n(x) = \frac{1 - \prod_{k=1}^n \cos(kx)}{x^2}$

f_n admet-elle un prolongement par continuité en 0 ? si oui définir ce prolongement.

Correction

$D_{f_n} = \mathbb{R}^*$; calculons $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x)$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on pose : $l_n = \lim_{x \rightarrow 0} f_n(x)$

On a : $l_n - l_{n-1} = \lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) - \lim_{x \rightarrow 0} f_{n-1}(x)$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (f_n(x) - f_{n-1}(x))$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \prod_{k=1}^n \cos(kx)}{x^2} - \frac{1 - \prod_{k=1}^{n-1} \cos(kx)}{x^2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\prod_{k=1}^{n-1} \cos(kx) - \prod_{k=1}^n \cos(kx)}{x^2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\prod_{k=1}^{n-1} \cos(kx) - \cos(nx) \prod_{k=1}^{n-1} \cos(kx)}{x^2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\prod_{k=1}^{n-1} \cos(kx) (1 - \cos(nx))}{x^2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\prod_{k=1}^{n-1} \cos(kx) \times \left(\frac{1 - \cos(nx)}{x^2} \right) \right)$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\prod_{k=1}^{n-1} \cos(kx) \right) = \cos^{n-1}(0) = 1 ; \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos(nx)}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(n^2 \times \frac{1 - \cos(nx)}{(nx)^2} \right) = \frac{n^2}{2}$$

$$\text{Donc pour tout } k \in \{2; \dots; n\} ; \text{ on a : } l_k - l_{k-1} = \frac{k^2}{2} \Rightarrow \sum_{k=2}^n l_k - l_{k-1} = \sum_{k=2}^n \frac{k^2}{2}$$

$$\Rightarrow l_n - l_1 = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n k^2$$

$$\Rightarrow l_n - l_1 = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n k^2$$

$$\begin{aligned} \text{Or } l_1 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2} ; \text{ donc } l_n = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n k^2 + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} \in \mathbb{R}$$

Par suite f_n admet un prolongement par continuité en 0

$$\text{Ce prolongement est définie sur } \mathbb{R} \text{ par : } \begin{cases} g_n(x) = \frac{1 - \prod_{k=1}^n \cos(kx)}{x^2} & ; \text{ si } x \neq 0 \\ g_n(0) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} \end{cases}$$

Exercice 10 :

On considère la fonction définie par : $f(x) = \frac{\sin(x) - x}{x^3}$

1) calculer $\sin(3x)$ en fonction de $\sin(x)$ pour tout x réel.

2) On admet que f admet un prolongement par continuité en 0 ; définir ce prolongement.

Correction

$$\begin{aligned} 1) \text{ On a : } \sin(3x) &= \sin(2x + x) \\ &= \sin(2x)\cos(x) + \sin(x)\cos(2x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\sin(x)\cos(x)\cos(x) + \sin(x)(1 - 2\sin^2(x)) \\
&= 2\sin(x)\cos^2(x) + \sin(x)(1 - 2\sin^2(x)) \\
&= 2\sin(x)(1 - \sin^2(x)) + \sin(x)(1 - 2\sin^2(x)) \\
&= \sin(x)(2 - 2\sin^2(x) + 1 - 2\sin^2(x)) \\
&= 3\sin(x) - 2\sin^3(x) - 2\sin^3(x) \\
&= 3\sin(x) - 4\sin^3(x)
\end{aligned}$$

Donc $\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$

2) Calculons $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

D'après la question précédente on a : $\sin(x) = 3\sin\left(\frac{x}{3}\right) - 4\sin^3\left(\frac{x}{3}\right)$

D'où pour tout $x \neq 0$; on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(x) - x}{x^3} &= \frac{3\sin\left(\frac{x}{3}\right) - 4\sin^3\left(\frac{x}{3}\right) - x}{x^3} \\
&= \frac{3\left(\sin\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{x}{3}\right) - 4\sin^3\left(\frac{x}{3}\right)}{27 \times \left(\frac{x}{3}\right)^3} \\
&= \frac{1}{9} \times \frac{\left(\sin\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{x}{3}\right)}{\left(\frac{x}{3}\right)^3} - \frac{4\sin^3\left(\frac{x}{3}\right)}{27 \times \left(\frac{x}{3}\right)^3} \\
&= \frac{1}{9} \times \frac{\left(\sin\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{x}{3}\right)}{\left(\frac{x}{3}\right)^3} - \frac{4}{27} \times \left(\frac{\sin\left(\frac{x}{3}\right)}{\left(\frac{x}{3}\right)}\right)^3
\end{aligned}$$

On pose $l = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3}$

Et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\sin\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{x}{3}\right)}{\left(\frac{x}{3}\right)^3} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t) - t}{t^3} = l$; en posant $t = \frac{x}{3}$

$$D'o\grave{u} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{9} \times \frac{\left(\sin\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{x}{3} \right)}{\left(\frac{x}{3}\right)^3} \right) - \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4}{27} \times \frac{\left(\sin\left(\frac{x}{3}\right) \right)^3}{\left(\frac{x}{3}\right)^3} \right)$$

$$\Leftrightarrow l = \frac{1}{9}l - \frac{4}{27} \quad (\text{car } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{3}\right)}{\left(\frac{x}{3}\right)} = 1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{9}l = -\frac{4}{27}$$

$$\Leftrightarrow l = -\frac{1}{6}$$

D'o\grave{u} le prolongement par continuit\`e de  $f$  est d\`efinie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sin(x) - x}{x^3} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = -\frac{1}{6} \end{cases}$$