



guessmaths

### EXERCICE 1

#### PARTIE A

Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par

$$g(x) = 1 - x - e^{-2x}$$

- 1- Etudier les variations de  $g$  sur  $]0; +\infty[$
- 2- Déterminer la limite de  $g$  en  $+\infty$  (on ne demande pas de construire la courbe représentative de  $g$ )
- 3- Démontrer qu'il existe un unique réel  $\alpha$  strictement positif tel que  $g(\alpha) = 0$  ; et montrer que :  
$$\frac{\ln 2}{2} < \alpha < 1$$
- 4- Etudier le signe de  $g$  sur  $]0; +\infty[$
- 5- Justifier que :  $0,79 \leq \alpha \leq 0,80$  .

#### PARTIE B

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = x \left( e^{\frac{2}{x}} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}$

Et  $C_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

##### 1- Etude des variations de $f$

Justifier que  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et montrer que ; pour tout réel  $x$  strictement positif :

$$f'(x) = \left( e^{\frac{2}{x}} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{2}{x}} g\left(\frac{1}{x}\right)$$

b) En déduire les variations de  $f$  sur  $]0; +\infty[$

##### 2- Etude de la limite de $f$ en 0.

a) Montrer que: pour tout réel  $x$  strictement positif :  $\ln[f(x)] = \frac{1}{x}(1 + x \ln x) + \frac{1}{2} \ln \left( 1 - e^{-\frac{2}{x}} \right)$

b) En déduire la limite de  $f$  en 0

c) Interpréter graphiquement le résultat

##### 4) Etude de la limite de $f$ en $+\infty$

a) Etudier la limite de  $\frac{e^{2u} - 1}{u^2}$  quand  $u$  tend vers 0

b) Vérifier que pour tout réel  $x$  strictement positif,  $f(x) = \left( \frac{e^{\frac{2}{x}} - 1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2} \right)^{\frac{1}{2}}$

c) En déduire la limite de  $f$  en  $+\infty$

##### 5) Représentation graphique de $f$

Tracer la courbe  $C_f$  dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

## EXERCICE 2

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par :  $f(x) = 5e^{-\frac{x}{\sqrt{3}}} \cos x$

1) a) Démontrer que :  $\forall x \in [0; +\infty[ , |f(x)| \leq 5e^{-\frac{x}{\sqrt{3}}}$

b) En déduire la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

2) Démontrer que  $f$  est dérivable sur  $[0; +\infty[$  et que :  $\forall x \in [0; +\infty[ , f'(x) = -\frac{10}{\sqrt{3}} e^{-\frac{x}{\sqrt{3}}} \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

3) Déterminer le signe de  $f'(x)$  sur  $[0; 2]$

4) Démontrer que :  $\forall x \in [0; 2\pi], f(x + 2\pi) = e^{-\frac{2\pi}{\sqrt{3}}} f(x)$

5) Dresser le tableau de variation de  $f$  sur l'intervalle  $[0; 4\pi]$

6) Tracer  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  sur l'intervalle  $[0; 4\pi]$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  (unité graphique 1 cm).

7) Soit  $f_1$  et  $f_2$  les fonctions définies sur  $[0; +\infty[$  par :  $f_1(x) = 5e^{-\frac{x}{\sqrt{3}}}$  et  $f_2(x) = -5e^{-\frac{x}{\sqrt{3}}}$

On note  $(C_1)$  et  $(C_2)$  leurs représentations graphiques respectives dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

a) Déterminer les points d'intersection de  $(C)$  et  $(C_1)$  et démontrer qu'en ces points, les courbes  $(C)$  et  $(C_1)$  ont une tangente commune.

b) Déterminer les points d'intersection de  $(C)$  et  $(C_2)$  et démontrer qu'en ces points, les courbes  $(C)$  et  $(C_2)$  ont une tangente commune

c) Tracer sur le graphique précédent les courbes  $(C_1)$  et  $(C_2)$

## EXERCICE 3

Dans chaque cas, justifier que  $f$  admet des primitives sur  $\mathbb{R}$  ; et déterminer une primitive  $F$  de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

1)  $f(x) = 2e^x - e^{2x}$  .

2)  $f(x) = e^{2-3x}$

3)  $f(x) = xe^{x^2}$

4)  $f(x) = (x+1)e^{x(x+2)}$

5)  $f(x) = (\sin x)e^{\cos x}$  .

6)  $f(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$

7)  $f(x) = \frac{e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^3}$

8)  $f(x) = (1 - 2\sin^2 x)e^{-\sin 2x}$

II- Déterminer, dans chaque cas, la primitive  $F$  de la fonction  $f$  sur  $I$  telle que :  $F(x_0) = y_0$

1)  $f(x) = e^{3x-1} : I = \mathbb{R} , x_0 = 1$  et  $y_0 = 2e^2$

2)  $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} e^{\tan x} ; I = \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[ , x_0 = \frac{\pi}{4}$  et  $y_0 = 0$

3)  $f(x) = \frac{e^x}{x^2} ; I = ]-\infty; 0[ , x_0 = -1$  et  $y_0 = 0$

4)  $f(x) = (1 - 2\cos 2x)e^{x + \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)} : I = \mathbb{R} , x_0 = \frac{\pi}{2}$  et  $y_0 = e^{\frac{\pi}{2}}$

### EXERCICE 3

#### PARTIE A

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = 2e^x - x - 2$

1. Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$
2. Etudier le sens de variation de  $g$  et puis dresser son tableau de variation
3. Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet exactement deux solutions réelles  $0$  et  $\alpha$  telle que  $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$
4. En déduire le signe de  $g$

#### PARTIE B

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$

1. Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
2. Calculer  $f'(x)$  et montrer que  $f'(x)$  et  $g(x)$  ont le même signe

Etudier les variations de  $f$ .

3. Montrer que :  $f(\alpha) = \frac{-(\alpha^2 + 2\alpha)}{4}$

En déduire un encadrement de  $f(\alpha)$

4. Dresser le tableau de variation de  $f$ .
5. Tracer la courbe  $C$  de  $f$  dans un repère orthonormé  $(0; \vec{i}; \vec{j})$
6. Soit  $m$  un réel négatif

a) Calculer  $\int_m^0 x e^x dx$

b) Calculer alors  $\int_m^0 f(x) dx$

c) Déterminer  $\lim_{m \rightarrow -\infty} \int_m^0 f(x) dx$