Série d'exercices sur les structures 2éme Bac SM

Exercice 1

Soit A l'ensemble des matrices s'écrivant $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ avec a et b des entiers relatifs.

1) Démontrer que A est un anneau pour les lois d'addition et de produits de matrices.

2) Déterminer les éléments inversibles de A.

Corrigé

1) Il suffit de démontrer que A est un sous-anneau de $\left(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+;\times\right)$. Pour cela, on remarque que :

- $A \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $I_2 \in A$ (choisir a=1 et b=0) ;
- Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & a' \end{pmatrix}$ sont dans A, alors $M - M' = \begin{pmatrix} a-a' & b-b' \\ 0 & a-a' \end{pmatrix}$ et $M \times M' = \begin{pmatrix} aa' & ab'+ba' \\ 0 & aa' \end{pmatrix}$ sont dans A.
- De plus $\times$ est associative car elle l'est dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- $\times$ est distributive par rapport à l'addition car elle l'est dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Donc $(A;+;\times)$ est un sous-anneau de $\left(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+;\times\right)$; par suite $(A;+;\times)$ est un anneau.

2) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ inversible dans A. Alors il existe $M' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & a' \end{pmatrix}$ dans A tel que $M \times M' = I_2$.

On obtient $\begin{pmatrix} aa' & ab'+ba' \\ 0 & aa' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

Donc $\begin{cases} aa' = 1 \\ ab'+ba' = 0 \end{cases}$ et comme a et a' sont dans $\mathbb{Z}$, on doit avoir $a = \pm 1$, et $a' = 1$.

Réciproquement, soit $M \in A$ *qui s'écrit* $M = \begin{pmatrix} \pm 1 & b \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$ *avec* $a = \pm 1$. *Posons* $M' = \begin{pmatrix} \pm 1 & -b \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$. *Alors* $M \times M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$. *Ainsi, M est inversible. On a donc démontré que les éléments inversibles de A sont ceux pour lesquels* $a = 1 ou\ a = 1$.

Exercice 5

Soit D l'ensemble des nombres décimaux, $D = \left\{ \frac{n}{10^k} ; n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N} \right\}$.

Démontrer que $(D;+;\times)$ *est un anneau.*

Quels sont ses éléments inversibles?

Corrigé

On va prouver que $(D;+;\times)$ *est un sous-anneau de* $(\mathbb{Q};+;\times)$. *On remarque d'abord que* $D \subset \mathbb{Q}$, *puis que* $1 \in D$.

De plus, soient $x = \frac{n}{10^k}$ *et* $y = \frac{m}{10^{k'}}$ *deux éléments de D. Alors* $x - y = \frac{n}{10^k} - \frac{m}{10^{k'}} = \frac{n10^{k'} - m10^k}{10^{k+k'}}$ *et* $x \times y = \frac{n}{10^k} \times \frac{m}{10^{k'}} = \frac{n \times m}{10^{k+k'}}$ *sont clairement des éléments de D, et* $(D;+;\times)$ *est bien un sous-anneau de* $(\mathbb{Q};+;\times)$.

Déterminons ensuite les inversibles de $(D;+;\times)$.

Soit $x = \frac{n}{10^k}$ *inversible, d'inverse* $y = \frac{m}{10^{k'}}$.

Alors $x \times y = 1 \Leftrightarrow \frac{n \times m}{10^{k+k'}} = 1$

$\Leftrightarrow n \times m = 10^{k+k'}$

.On en déduit que les seuls diviseurs premiers de n sont 2 et 5, autrement dit que n s'écrit $n = \pm 2^p \times 5^q$ *pour* $((p;q) \in \mathbb{N}^2)$.

Réciproquement, soit $x = \pm \frac{2^p \times 5^q}{10^k}$ *et montrons que x est inversible dans D.*

Posons $y = \pm \frac{10^k}{2^p \times 5^q}$. *Il suffit de vérifier que y est élément de D.*

On peut aussi écrire $y = \pm \frac{10^k}{2^p \times 5^q}$

$$= \pm \frac{10^k \times 2^q \times 5^p}{2^{p+q} \times 5^{q+p}}$$
$$= \pm \frac{2^{q+k} \times 5^{p+k}}{10^{p+q}}$$

Et on vérifie facilement que $x \times y = 1$

Ainsi, les inversibles de $(D;+;\times)$ *sont les éléments* $x = \pm \frac{2^p \times 5^q}{10^k}$, *avec* $((p;q;k) \in \mathbb{N}^3)$.

Exercice 6

On considère $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} / (a;b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

1) *Montrer que* $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}];+;\times)$ *est un anneau.*

2) *On note* $N(a + b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2$.

Montrer que, pour tous x , y de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, *on a* $N(xy) = N(x)N(y)$.

En déduire que les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ *sont ceux s'écrivant* $a + b\sqrt{2}$ *avec* $a^2 - 2b^2 = \pm 1$.

Corrigé

1) *Il suffit de prouver que* $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}];+;\times)$ *est un sous-anneau de* $(\mathbb{R};+;\times)$.

On a :

► $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ *est stable par la loi* $+$: $(a + b\sqrt{2}) + (a' + b'\sqrt{2}) = ((a + a') + (b + b')\sqrt{2})$

Et $((a + a');(b + b')) \in \mathbb{Z}^2$.

► $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ *stable par la loi* $\times$: $(a + b\sqrt{2}) \times (a' + b'\sqrt{2}) = ((aa' + 2bb') + (ab' + a'b)\sqrt{2})$

Et $((aa' + 2bb');(ab' + a'b)) \in \mathbb{Z}^2$.

► $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ *stable par passage à l'opposé :* $-(a + b\sqrt{2}) = -a + (-b)\sqrt{2}$.

Et $(-a;-b) \in \mathbb{Z}^2$

► *De plus,* $1 \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, *pour* $a = 1$ *et* $b = 0$

Donc $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}];+;\times)$ *est un sous-anneau de* $(\mathbb{R};+;\times)$

2) *Posons* $x = a + b\sqrt{2}$ *et* $y = a' + b'\sqrt{2}$.

En tenant compte de la formule pour le produit obtenue à la question précédente, on a :

$N(xy)=(aa'+2bb')^2-2(ab'+a'b)^2$.

$=(aa')^2-2(ab')^2-2(a'b)^2+4(bb')^2$

D'autre part,

$N(x)N(y)=(a^2-2b^2)(a'^2-2b'^2)$

$=(aa')^2-2(a'b)^2-2(ab')^2+4(bb')^2$

$=N(xy)$

Donc pour tous x, y de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, *on a* $N(xy)=N(x)N(y)$.

Soit $x=a+b\sqrt{2}$.

Supposons d'abord que x est inversible, d'inverse y.

Alors $N(xy)=N(1)=1$, *et donc* $N(x)N(y)=1$.

Puisque $N(x)$ *et* $N(y)$ *sont tous les deux des entiers, on a nécessairement* $N(x)=\pm 1$.

Réciproquement, si $N(x)=\pm 1$, *alors, en utilisant la quantité conjuguée :*

$$\frac{1}{a+b\sqrt{2}}=\frac{a-b\sqrt{2}}{a^2-2b^2}=\pm(a-b\sqrt{2})$$

ce qui montre que $a+b\sqrt{2}$ *est inversible, d'inverse* $\pm(a-b\sqrt{2})$.

Exercice 9

Soit p un nombre premier. On note $\mathbb{Z}_p=\left\{\frac{a}{b}/(a;b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*; p\wedge b=1\right\}$.

1) *Démontrer que* $(\mathbb{Z}_p;+;\times)$ *est un sous-anneau de* $(\mathbb{Q};+;\times)$.

2) *Démontrer que pour tout nombre rationnel non nul x, alors* $x\in\mathbb{Z}_p$ *ou* $x^{-1}\in\mathbb{Z}_p$.

3) *Soit* $(B;+;\times)$ *un sous-anneau de* $(\mathbb{Q};+;\times)$ *contenant* $\mathbb{Z}_p$.

Démontrer que $B=\mathbb{Q}$ *ou que* $B=\mathbb{Z}_p$.

Corrigé

1) *On remarque d'abord que*

► $1 \in \mathbb{Z}_p$.

► *Soit ensuite* $x = \frac{a}{b}$ *et* $y = \frac{c}{d}$ *deux éléments de* $\mathbb{Z}_p$. *Alors puisque* $p \wedge b = 1$ *et* $p \wedge d = 1$, *on a* $p \wedge bd = 1$.

Mais puisque $x - y = \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$ *et* $x \times y = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, *on a* $(x - y) \in \mathbb{Z}_p$ *et* $(xy) \in \mathbb{Z}_p$.

Ainsi, $(\mathbb{Z}_p; +; \times)$ *est bien un sous-anneau de* $(\mathbb{Q}; +; \times)$.

2) *Soit* $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$, *écrit sous forme irréductible.*

Si $x \in \mathbb{Z}_p$, *c'est fini. Sinon, c'est que* $p \setminus b$ *(rappelons que p est premier) et puisque* $a \wedge b = 1$, *on a* $p \wedge a = 1$. *Ainsi,* $x^{-1} = \frac{b}{a} \in \mathbb{Z}_p$.

3) *On suppose que* $B \neq \mathbb{Z}_p$

Soit $x \in B \setminus \mathbb{Z}_p$. *Alors x s'écrit* $x = \frac{a}{p^n b}$ *avec* $a \wedge b = 1$ *et* $p \wedge b = 1$.

En particulier, on sait que $y = \frac{p^{n-1} b}{a} \in \mathbb{Z}_p \subset B$, *et puisque B est un sous-anneau,*

$xy = \frac{1}{p} \in B$. *Prenant les puissances de cet élément, on a* $\frac{1}{p^k} \in B$ *pour* $k \geq 0$.

Finalement, considérons $r \in \mathbb{Q}; r \neq 0$.

On peut écrire $r = \frac{c}{p^m d}$, *avec* $p \wedge d = 1$

Alors $r = \frac{c}{d} \times \frac{1}{p^m} \in B$ *(Car* $\frac{c}{d} \in \mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Q}$ *et* $\frac{1}{p^m} \in B$*).*

Donc $\mathbb{Q} \subset B$ *; par suite* $B = \mathbb{Q}$

D'où si $(B; +; \times)$ *un sous-anneau de* $(\mathbb{Q}; +; \times)$ *contenant* $\mathbb{Z}_p$ *; on a* $B = \mathbb{Q}$ *ou que* $B = \mathbb{Z}_p$.