EXERCICE1 :(10 points)

0.25 **A**-1- Vérifier que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^{+}\right)\quad;\quad 0\le 1-x+x^2-\dfrac{1}{x+1}\le x^3$

0.25 2- En déduire que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^{+}\right)\quad;\quad 0\le x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-ln(1+x)\le\dfrac{x^4}{4}$

B- On considère la fonction f définie sur $I=[0,+\infty[$ par :

$$f(0)=\frac{1}{2}\quad\text{et pour tout } x \text{ de }]0,+\infty[\ ;\ f(x)=\frac{x-ln(1+x)}{x^2}$$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

0.5 1-a) Montrer que f est continue à droite en 0

0.5 b) Montrer que f est dérivable à droite en 0

0.5 c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.5 2-a) Montrer que : $\left(\forall x\in\left]0,+\infty\right[\right)\quad;\quad f'(x)=-\dfrac{g(x)}{x^3}$

où $g(x)=x+\dfrac{x}{x+1}-2ln(1+x)$

0.5 b) Montrer que : $\left(\forall x\in I\right)\ ;\ 0\le g'(x)\le x^2$

0.25 c) En déduire que : $\left(\forall x\in I\right)\quad;\quad 0\le g(x)\le\dfrac{x^3}{3}$

0.25 d) Déterminer le sens de variation de f sur I

0.25 3-a) Dresser le tableau de variation de f

0.5 b) Représenter graphiquement la courbe (C) dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

(On prendra $\left\|\vec{i}\right\|=2cm$ et $\left\|\vec{j}\right\|=2cm$)

0.5 **C**-1- Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha\in\left]0;1\right[$ tel que $f(\alpha)=\alpha$

2- On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0=\frac{1}{3}\quad\text{et}\quad\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)\quad;\quad u_{n+1}=f(u_n)$$

0.5 a) Montrer que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)\quad;\quad u_n\in[0;1]$

0.5 b) Montrer que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)\quad;\quad\left|u_{n+1}-\alpha\right|\le\left(\dfrac{1}{3}\right)\left|u_n-\alpha\right|$

0.5 c) Montrer par récurrence que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)\quad;\quad\left|u_n-\alpha\right|\le\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

0.25 d) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α

D- Pour tout $x\in I$, on pose : $F(x)=\displaystyle\int_x^1 f(t)dt$

0.5 1- Montrer que la fonction F est dérivable sur I et calculer $F'(x)$ pour tout $x\in I$

0.5 2-a) En utilisant la méthode d'intégration par parties, montrer que :

$$\left(\forall x\in\left]0,+\infty\right[\right)\quad;\quad F(x)=2ln2-\left(1+\frac{1}{x}\right)ln(1+x)$$

0.5 b) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)$, puis en déduire que : $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt=2ln2-1$

0.5 c) Calculer en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x=1$

E- On pose : pour tout k de $\mathbb{N}$, $\Delta_k=f(k)-\displaystyle\int_k^{k+1} f(t)dt$

et pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1}\Delta_k$

0.25 1-a) Vérifier que : $\left(\forall k\in\mathbb{N}\right)\quad;\quad 0\le\Delta_k\le f(k)-f(k+1)$

0.5 b) En déduire que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)\quad;\quad 0\le S_n\le\dfrac{1}{2}$

0.25 2-a) Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone.

0.25 b) En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

0.25 c) Montrer que la limite ℓ de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie : $\dfrac{3}{2}-2ln2\le\ell\le\dfrac{1}{2}$

EXERCICE2 :(3.5 points)

Soit m un **nombre complexe non nul** donné et $j=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=e^{i\frac{2\pi}{3}}$

I- On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z

$$(E_m)\ :\ z^2+mj^2z+m^2j=0$$

0.5 1- Vérifier que : $j^3=1$ et $1+j+j^2=0$

0.25 2-a) Montrer que le discriminant de l'équation (E_m) est : $\Delta=\left[m(1-j)\right]^2$

0.5 b) Déterminer z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (E_m)

0.5 3- Dans cette question, on suppose que : $m=1+i$

Montrer que $(z_1+z_2)^{2022}$ est un imaginaire pur.

II- Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soit φ la transformation du plan complexe qui à tout point $M(z)$ fait correspondre le point $M'(z')$ tel que : $z'=(1+j)z$

0.25 1- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application φ

2- On considère les points A, B et C d'affixes respectives m, mj et mj^2 et on note $A'(a')$, $B'(b')$ et $C'(c')$ les images respectives des points A, B et C par l'application φ et soient $P(p)$, $Q(q)$ et $R(r)$ les milieux respectifs des segments $[BA']$, $[CB']$ et $[AC']$

0.75 a) Montrer que : $a'=-mj^2$, $b'=-m$ et $c'=-mj$

0.25 b) Montrer que : $p+qj+rj^2=0$

0.5 c) En déduire que le triangle PQR est équilatéral.

EXERCICE3 :(3 points)

Soit n un entier naturel strictement supérieur à 1

On considère dans $\mathbb{N}^2$ l'équation $(E_n)\ :\ (x+1)^n-x^n=ny$

Soit (x,y) une solution de l'équation (E_n) dans $\mathbb{N}^2$ et soit p **le plus petit diviseur premier** de n

0.25 1-a) Montrer que : $(x+1)^n\equiv x^n\ [p]$

0.25 b) Montrer que p est premier avec x et avec $(x+1)$

0.25 c) En déduire que : $(x+1)^{p-1}\equiv x^{p-1}\ [p]$

0.5 2- Montrer que si n est pair, alors l'équation (E_n) n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}^2$

3- On suppose que n est impair.

0.5 a) Montrer qu'il existe un couple (u,v) de $\mathbb{Z}^2$ tel que : $nu+(p-1)v=1$

(On rappelle que p est le plus petit diviseur premier de n)

0.25 b) Soient q et r respectivement le quotient et le reste dans la division euclidienne de u par $(p-1)$. Vérifier que : $nr=1-(p-1)(v+nq)$

0.5 c) On pose : $v'=-(v+nq)$. Montrer que : $v'\geq 0$

0.5 d) Montrer que l'équation (E_n) n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}^2$

EXERCICE4 :(3.5 points)

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire non commutatif d'unité $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et que $(\mathbb{Z},+,\times)$ est un anneau commutatif unitaire et intègre.

Soit $E=\left\{M(a,b)=\begin{pmatrix}a&3b\\b&a\end{pmatrix}/(a,b)\in\mathbb{Z}^2\right\}$

0.25 1-a) Montrer que E est un sous-groupe de $(M_2(\mathbb{R}),+)$

0.25 b) Vérifier que pour tout a,b,c et d de $\mathbb{Z}$, on a :

$$M(a,b)\times M(c,d)=M(ac+3bd,ad+bc)$$

0.5 c) Montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif et unitaire.

2- Soit φ l'application définie de E vers $\mathbb{Z}$ par :

$$\forall(a,b)\in\mathbb{Z}^2\ ;\ \varphi(M(a,b))=|a^2-3b^2|$$

0.5 Montrer que φ est un homomorphisme de $(E,\times)$ vers $(\mathbb{Z},\times)$

3- Soit $M(a,b)\in E$

0.25 a) Montrer que $M(a,b)\times M(a,-b)=(a^2-3b^2).I$

0.5 b) Montrer que si $M(a,b)$ est inversible dans $(E,\times)$ alors $\varphi(M(a,b))=1$

0.5 c) On suppose que $\varphi(M(a,b))=1$.

Montrer que $M(a,b)$ est inversible dans $(E,\times)$ et préciser son inverse.

0.25 4-a) Montrer que : $\forall(a,b)\in\mathbb{Z}^2\ ;\ \varphi(M(a,b))=0\Leftrightarrow a=b=0$

0.25 b) En déduire que l'anneau $(E,+,\times)$ est intègre.

0.25 c) Est-ce que $(E,+,\times)$ est un corps ? justifier votre réponse.

FIN