



guessmaths

Série n° 12 d'exercices sur limites et continuité

2ème Bac PC

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, calculer la limite de la fonction f en a .

$$\blacktriangleright f(x) = \frac{1}{2}x^8 - x^3 + x + 1 \quad a = -1$$

$$\blacktriangleright f(x) = \frac{6x^4 + x + 1}{x^2 - x + 1} \quad a = \frac{1}{4}$$

$$\blacktriangleright f(x) = -x^5 - 2x(x-1) + 5x^3 + 1 \quad a = -1$$

$$\blacktriangleright f(x) = \frac{x}{10^{10}} - 10x^{21} + \frac{\sqrt{3}}{25}x - 3 \quad a = 0$$

$$\blacktriangleright f(x) = -3(-2x+1)^5 \quad a = 1$$

$$\blacktriangleright f(x) = \frac{-10x^2}{x+2} \quad a = -3$$

$$\blacktriangleright f(x) = \frac{x-1}{x^2+3} \quad a = 1$$

Correction

$$\blacktriangleright f(x) = \frac{1}{2}x^8 - x^3 + x + 1$$

f est continue sur $\mathbb{R}$; donc $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) = \frac{3}{2}$

$$\blacktriangleright f(x) = \frac{6x^4 + x + 1}{x^2 - x + 1} ; \text{ les fonctions } x \mapsto 6x^4 + x + 1 \text{ et } x \mapsto x^2 - x + 1 \text{ sont continue en}$$

$a = \frac{1}{4}$; de plus en $x^2 - x + 1$ ne s'annule pas en $a = \frac{1}{4}$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} f(x) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{163}{104}$$

$$\blacktriangleright f(x) = -x^5 - 2x(x-1) + 5x^3 + 1$$

f est continue sur $\mathbb{R}$; donc $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) = -3$

$$\blacktriangleright f(x) = \frac{x}{10^{10}} - 10x^{21} + \frac{\sqrt{3}}{25}x - 3$$

f est continue sur $\mathbb{R}$; donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = -3$

$$\blacktriangleright f(x) = -3(-2x+1)^5$$

f est continue sur $\mathbb{R}$; donc $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 3$

$$\blacktriangleright f(x) = \frac{-10x^2}{x+2}$$

f est continue sur $]-\infty; -2[$; et $(-3 \in]-\infty; -2[)$ donc $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = f(-3) = 90$

$$\blacktriangleright f(x) = \frac{x-1}{x^2+3}$$

f est continue sur $\mathbb{R}$; donc $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 0$

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, calculer la limite de la fonction f en a .

$$\blacktriangleright f(x) = \left| \frac{4x^2 - 1}{2x + 1} \right| \quad a = -\frac{1}{2}$$

$$\blacktriangleright f(x) = \frac{|-x + 10|}{x - 10} \quad a = 10$$

$$\blacktriangleright f(x) = \frac{-\sqrt{2}|x+1| + |x-\sqrt{2}|}{|x|^3} \quad a = 0$$

$$\blacktriangleright f(x) = \frac{-|4x| - |x|^3}{2+x} \quad a = -2$$

$$\blacktriangleright f(x) = \frac{3|x|^5 - 3}{1+x} \quad a = -1$$

Correction

$$\blacktriangleright \text{pour } x \neq -\frac{1}{2} \text{ on a : } \left| \frac{4x^2 - 1}{2x + 1} \right| = \left| \frac{(2x+1)(2x-1)}{2x+1} \right| = |2x-1|$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} |2x-1| = 2$$

$$\blacktriangleright \text{Pour } x > 10 \text{ on a : } -x + 10 < 0 \Rightarrow |-x + 10| = x - 10 \\ \Rightarrow \frac{|-x + 10|}{x - 10} = 1$$

$$D'où \lim_{x \rightarrow 10^+} f(x) = 1$$

Pour $x < 10$ on a : $-x + 10 > 0 \Rightarrow |-x + 10| = -x + 10$

$$\Rightarrow \frac{|-x + 10|}{x - 10} = -1$$

D'où $\lim_{x \rightarrow 10^-} f(x) = -1$

► Soit $-1 < x < 1$; on a : $-\sqrt{2}|x+1| + |x-\sqrt{2}| = -\sqrt{2}(x+1) - x + \sqrt{2}$
 $= -x(1 + \sqrt{2})$

D'où $\frac{-\sqrt{2}|x+1| + |x-\sqrt{2}|}{|x|^3} = \frac{-x(1 + \sqrt{2})}{|x|^3}$

Donc • Si $x < 0$; on a : $\frac{-\sqrt{2}|x+1| + |x-\sqrt{2}|}{|x|^3} = \frac{-x(1 + \sqrt{2})}{-x^3}$
 $= \frac{(1 + \sqrt{2})}{x^2}$

Alors $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 + \sqrt{2}}{x^2} = +\infty$

• Si $x > 0$; on a : $\frac{-\sqrt{2}|x+1| + |x-\sqrt{2}|}{|x|^3} = \frac{-x(1 + \sqrt{2})}{x^3}$
 $= \frac{-(1 + \sqrt{2})}{x^2}$

Alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-(1 + \sqrt{2})}{x^2} = -\infty$

► Soit • $x < -2$; on a : $-|4x| - |x|^3 = 4x + x^3$

Alors $\frac{-|4x| - |x|^3}{2+x} = \frac{4x + x^3}{2+x}$; Donc $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{4x + x^3}{2+x} = -\infty$

(car $\lim_{x \rightarrow -2^-} (2+x) = 0^+$)

• Soit $-2 < x < -1$; on a : $-|4x| - |x|^3 = 4x + x^3$

Alors $\frac{-|4x| - |x|^3}{2+x} = \frac{4x + x^3}{2+x}$; Donc $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{4x + x^3}{2+x} = +\infty$

$$(car \lim_{x \rightarrow -2^+} (2+x) = 0^-)$$

► • Soit $x < -1$; on a : $3|x|^5 - 3 = -3x^5 - 3$

$$= -3(x^5 + 1)$$

$$= -3(x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-3(x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)}{1+x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1^-} -3(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) = -15$$

• Soit $-1 < x < 0$; on a : $3|x|^5 - 3 = -3x^5 - 3$

$$= -3(x^5 + 1)$$

$$= -3(x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{-3(x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)}{1+x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1^+} -3(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) = -15$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -15$$

Exercice 3

Dans chacun des cas suivants, calculer la limite de la fonction f en a .

$$\text{► } f(x) = \frac{\sqrt{3x+12} + \sqrt{x+1} - 9}{x-8}$$

$$a = 8$$

$$\text{► } f(x) = \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{2x+2} - 3}{x-1}$$

$$a = 1$$

$$\text{► } f(x) = \frac{x^2 - 3x - 4 + \sqrt[3]{|x|} - 1}{x+1}$$

$$a = -1$$

Correction

$$\text{► Pour } x \neq 8 ; \text{ on a : } \frac{\sqrt{3x+12} + \sqrt{x+1} - 9}{x-8} = \frac{\sqrt{3x+12} - 6 + \sqrt{x+1} - 3}{x-8}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{3x+12} - 6 + \sqrt{x+1} - 3}{x-8} \\
&= \frac{\frac{3x+12-36}{\sqrt{3x+12}+6} + \frac{x+1-9}{\sqrt{x+1}+3}}{x-8} \\
&= \frac{\frac{3(x-8)}{\sqrt{3x+12}+6} + \frac{x-8}{\sqrt{x+1}+3}}{x-8} \\
&= \frac{3}{\sqrt{3x+12}+6} + \frac{1}{\sqrt{x+1}+3}
\end{aligned}$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 8} f(x) = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{3}{\sqrt{3x+12}+6} + \frac{1}{\sqrt{x+1}+3} = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{1}{4}$

► Pour $x \neq 1$; on a :
$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{2x+2} - 3}{x-1} &= \frac{\sqrt[3]{x} - 1 + \sqrt{2x+2} - 2}{x-1} \\
&= \frac{\frac{x-1}{x^2+x+1} + \frac{2x+2-4}{\sqrt{2x+2}+2}}{x-1} \\
&= \frac{\frac{x-1}{x^2+x+1} + \frac{2(x-1)}{\sqrt{2x+2}+2}}{x-1} \\
&= \frac{1}{x^2+x+1} + \frac{2}{\sqrt{2x+2}+2}
\end{aligned}$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2+x+1} + \frac{2}{\sqrt{2x+2}+2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$

► Pour $x \neq -1$ et $-\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2}$; on a :

$$\begin{aligned}
\frac{x^2 - 3x - 4 + \sqrt[3]{|x|} - 1}{x+1} &= \frac{x^2 - 3x - 4}{x+1} + \frac{\sqrt[3]{-x} - 1}{x+1} \\
&= \frac{(x+1)(x-4)}{x+1} + \frac{-x-1}{x^2+x+1} \\
&= x-4 - \frac{1}{x^2+x+1}
\end{aligned}$$

Donc $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \left(x-4 - \frac{1}{x^2+x+1} \right) = -6$

Exercice 4

Soit la fonction f définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2} & \text{si } x < 2 \\ f(x) = \frac{24}{\sqrt{x+2}} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de f à droite et à gauche en 2.
2. La fonction f est-elle continue en 2 ?

Correction

1. Pour $x < 2$; on a :
$$\begin{aligned} \frac{x^3 - 8}{x - 2} &= \frac{x^3 - 2^3}{x - 2} \\ &= \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} \\ &= x^2 + 2x + 4 \end{aligned}$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 + 2x + 4 = 12$ et $f(2) = \frac{24}{\sqrt{2+2}} = 12$

D'où $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2)$

Par suite f est continue à gauche en 2

2. Comme la fonction $x \mapsto \frac{24}{\sqrt{x+2}}$ est continue à droite en 2 ; alors f est continue en 2.

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x < 2 \\ f(x) = \frac{x - 2}{\sqrt{x+2} - 2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

1. Déterminer la limite de f à droite en 2.
2. Déterminer la limite de f à gauche en 2.
3. La fonction f admet-elle une limite en 2 ?

Correction

1. Pour $x > 2$; on a :
$$\frac{x - 2}{\sqrt{x+2} - 2} = \frac{(x - 2)(\sqrt{x+2} + 2)}{(\sqrt{x+2} - 2)(\sqrt{x+2} + 2)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{x+2-4} \\
 &= \frac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{x-2} \\
 &= \sqrt{x+2}+2
 \end{aligned}$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x+2} + 2 = 4$.

$$\begin{aligned}
 2. \text{ Pour } x < 2 ; \text{ on a : } \frac{x^2 - 4}{x - 2} &= \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} \\
 &= x+2
 \end{aligned}$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x + 2 = 4$.

$$3. \text{ On a : } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4$$

Alors la fonction f admet une limite en 2 et $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$