Exercice 1:

I. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z définie par : $(E): z^2 + 8\sqrt{3}z + 64 = 0$

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

2) En déduire les solutions de l'équation: $\left(2i\bar{z} - 4\sqrt{3}\right)^2 + 83\left(2i\bar{z} - 4\sqrt{3}\right) + 64 = 0$

II. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

On considère les points A;B et C d'affures respectives: $z_A = -4\sqrt{3} - 4i$; $z_B = -4\sqrt{3} + 4i$; $z_C = \sqrt{3} + i$.

1) a) Ecrire les nombres complexes z_A et z_B sous forme exponentielle.

   b) Montrer que le triangle OAB est équilatéral.

2) Soit D l'image du point C par l'homothétie h de centre $\Omega\left(\omega = 2\sqrt{3}\right)$ et de rapport $k = 2$.

   a) Montrer que l'affixe du point D est $z_D = 2i$

   b) Déterminer une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OD})$.

3) Soit G le barycentre du système pondéré $\{(B;1);(D;1);(O;-1)\}$.

   a) Montrer que l'affixe du point G est $z_G = -4\sqrt{3} + 6i$.

   b) Déterminer la nature du quadrilatère $OBGD$.

4) Déterminer l'ensemble (ζ) des points $M(z)$ du plan tels que: $\left\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MO}\right\| \leq 2$

EXERCICE 2 :

On considère dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ les points $A(3;0;2)$; $B(5;-1;1)$; $C(0;2;3)$ et la sphère (S) d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 25 = 0$

1) Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $(1;0;1)$ et que son rayon est $R = 3\sqrt{3}$

2) a) Montrer que: $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ et que: $x + y + z - 5 = 0$ est une équation cartésienne Du plan (ABC)

   b) Vérifier que : $d(\Omega;(ABC)) = \sqrt{3}$ puis montrer que le plan (ABC) coupe la sphère (S) en un Cercle (Γ) de rayon $r = 2\sqrt{6}$

3) Soit (Δ) la droite passant par le point Ω est perpendiculaire au plan (ABC)

a) Montrer que: $\begin{cases} x = 1+1 \\ y = t \\ z = 1+t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$; est une représentation paramétrique de la droite (Δ)

b) Montrer que $H(2;1;2)$ c'est le point d'intersection de la droite (Δ) et le plan (ABC)

c) Déduire le centre du cercle (Γ)

Exercice 3:

Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_n + 3}{U_n + 2} \end{cases}$ $;\forall n \in IN$

1) Montrer que $\forall n \in IN : 0 < U_n < \sqrt{3}$.

2) Etudier la monotonie de la suite (U_n). Que peut-on en déduire?

3) a) Montrer que $\forall n \in IN$; $|U_{n+1} - 3| < \dfrac{1}{2}|U_n - 3|$.

b) En déduire que $\forall n \in IN$; $|U_n - \sqrt{3}| < \left(\dfrac{1}{2}\right)^n (\sqrt{3} - 1)$.

c) Déterminer la limite de la suite (U_n).

4) On considère la suite $(V_n)_{n\geq 1}$ définie par $\forall n \in IN$; $V_n = \dfrac{U_1 + U_2 + \ldots + U_n}{n}$

a) Montrer que $\forall n \in IN$; $V_n < U_n$.

b) Vérifier que $\forall n \in IN$; $V_{n+1} = \dfrac{nV_n + U_n}{n+1}$

5) Etudier la monotonie de la suite $(V_n)_{n\geq 1}$, puis déduire qu'elle est convergente.

EXERCICE 4

Une urne contient huit jetons: un jeton porte le nombre 1 et cinq jetons portent le nombre 2
Et deux jetons portent le nombre 3 (les jetons sont indiscernables au toucher)
On tire au hasard et simultanément trois jetons de l'urne

1) Soit A l'événement " obtenir trois jetons portant des nombres distincts deux à deux "

Montrer que: $p(A) = \dfrac{5}{28}$

2) Soit B l'événement" les jetons tirés portent des nombres dont la somme est égale à 8"

Montrer que: $p(B) = \dfrac{5}{56}$

3) Soit C l'événement "Les jeton tirés portent des nombres dont la somme est égale à 7 "

Montrer que : $P(C) = \dfrac{3}{8}$

Problème :

Partie I

On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=2ln(x)+\frac{1}{x}-1$

1) Calculer $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} g(x)$.

2) Etudier les variations de la fonction g puis dresser son tableau de variation.

3) a) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $\left]0;\frac{1}{2}\right[$

b) Montrer que : $\frac{1}{4}<\alpha<\frac{1}{2}$; puis déterminons un encadrement de α d'amplitude 125×10^{-3}

4) Calculer $g(1)$; puis déterminer le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.

Partie II

Soit f la fonction définie sur IR par : $\begin{cases} f(x)=x^2(lnx-1)+x & ;\forall x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$;

et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité $2cm$)

1) Montrer que la fonction f est continue à droite en 0.

2) Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite de 0; puis interpréter graphiquement le résultat.

3) a) Montrer que : $\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

b) Calculer $\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x}$, puis déterminer la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$.

4) a) Montrer que : $(\forall x\in]0;+\infty[); f'(x)=xg(x)$

b) Dresser le tableau de variation de f sur $]0;+\infty[$.

c) Déduire que : $(\forall x\in]0;+\infty[); f(x)\geq 0$

5) Montrer que : $f(\alpha)=\frac{\alpha}{2}(1-\alpha)$.

6) Construire la courbe (C_f). (On prend $\alpha\approx 0,3$).

7) Soit h la restriction de f à l'intervalle $I=[1;+\infty[$

a) Montrer que: h admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J a déterminer.

b) Calculer $(h^{-1})'(e)$ (Remarquer que $h(e)=e$).

c) Construire dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ la courbe représentative de la fonction h^{-1}.

8) a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que: $\int_1^e x^2 \ln x dx = \dfrac{2e^3+1}{9}$

b) Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par (C_f); l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.