guessmaths

Devoir surveillé n°2 2éme Semestre **2éme Bac SM**

Exercice 01 : (03 points)

On pose : $I=\int_{-1}^{1} t.\mathrm{Arc}\tan(t)\,dt$ *et*

1)- *Montrer que :* $I=\dfrac{\pi}{2}-1$ *(On pourra utiliser une intégration par parties).*

2)- *Montrer que :* $J=\int_{-1}^{1}\dfrac{e^t}{1+e^t}\left(t.\mathrm{Arctan}(t)\right)dt$

3)- *En utilisant les questions précédentes, déduire la valeur de* J .

Exercice 02 : (03 points)

Soit f *la fonction définie sur* $\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right[$ *par :* $f(x)=\dfrac{1}{\sin x}$.

1)- **a)**- *Montrer que* f *admet une fonction réciproque* f^{-1} *définie sur* $[1;+\infty[$.

b)- *Montrer que* f^{-1} *est dérivable sur* $]1;+\infty[$ *et que :*

$$(\forall x\in]1;+\infty[);\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

2)- *Déduire la valeur de l'intégrale :* $I=\int_{\frac{2\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{2}}\dfrac{1}{t\sqrt{t^2-1}}\,dt$.

3)- *Retrouver la valeur de* I *en utilisant le changement de variable :* $u=\sqrt{x^2-1}$.

Exercice 03 : (4,5 points)

I- Soit $n\in\mathbb{N}^*$ *et* f_n *la fonction définie sur* $[0;1[$ *par :* $f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}$.

1)- *Vérifier que* f_n *admet une primitive unique* F_n *sur* $[0;1[$ *tels que :* $F_n(0)=0$.

2)- *Montrer que :* $(\forall x\in[0;1[);F_n(x)=\dfrac{x-x^{n+1}}{1-x}$.

3)- *En déduire que :* $(\forall x\in[0;1[);\ f_n(x)=\dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$.

II- On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *définies par :*

$u_n = n.q^n$ *et* $v_n = \dfrac{n}{(1+a)^n}$ *Où* $q \in]0;1[$ *et* $a \in \mathbb{R}^{*+}$.

1)- a)- *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N}^*);(1+a)^n \geq \dfrac{n(n-1)}{2}.a^2$ *, puis en déduire* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

b)- *Calculer la limite de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *en justifiant votre réponse.*

2)- *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*, on pose :* $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k(\tan\theta)^{k-1}$ *Où* $\theta \in \left]0;\dfrac{\pi}{4}\right[$.

En utilisant ce qui précède, montré que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est convergente*

En précisant sa limite en fonction de θ.

***Exercice 04* : (4,5 points)**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ *on pose :* $I_n = \int_1^e x^2(\ln x)^n\,dx$.

1)- *Calculer* I_0 *et* I_1.

2)- a)- *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N});I_{n+1} = \dfrac{1}{3}e^3 - \dfrac{n+1}{3}.I_n$ *(On pourra utiliser une Intégration par parties).*

b)- *En déduire les valeurs de* I_2 *et* I_3.

3)- *Montrer que la suite* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est décroissante.*

4)- a)- *vérifier que :* $(\forall n \in \mathbb{N}^*);I_n \geq 0$.

b)- *Montrer que :* $(\forall x \in [1;e]);\ln x \leq \dfrac{x}{e}$ *, puis en déduire* $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

5)- *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N});\dfrac{e^3}{n+4} \leq I_n \leq \dfrac{e^3}{n+3}$ *, puis en déduire* $\lim\limits_{n\to+\infty} n.I_n$.

***Exercice 05* : (05 points)**

I- Soit F *la fonction définie sur* $]0;1]$ *par :* $(\forall x \in]0;1]);F(x) = \int_x^1 \dfrac{e^{-t}}{t}dt$.

1)- a)- *Montrer que* $(\forall x \in]0;1]);F(x) \geq \dfrac{-\ln x}{e}$.

b)- *En déduire la limite* $\lim\limits_{x\to0^+} F(x)$.

2)- a)- *Montrer que* F *est dérivable sur* $]0;1]$ *et que :* $(\forall x \in]0;1]);F'(x) = \dfrac{-e^{-t}}{t}$.

b)- *En déduire la monotonie* F *de sur* $]0;1]$.

3)- a)- *Montrer que :* $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)\left(\exists! a_n\in\left]0;1\right]\right);F\left(a_n\right)=n$.

b)- *Justifier soigneusement que :* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=0$.

II- On considère la fonction g *définie sur le segment* $\left[0;1\right]$ *par :*

$$\begin{cases} g\left(0\right)=-1 \\ \left(\forall t\in\left]0;1\right]\right);g\left(t\right)=\dfrac{e^{-t}-1}{t} \end{cases}$$

1)- *Montrer que* g *est continue sur* $\left[0;1\right]$.

2)- *Pour tout* $x\in\left[0;1\right]$, *on pose :* $G\left(x\right)=\int_x^1 g\left(t\right)dt$.

a)- *Montrer que* G *est continue sur* $\left[0;1\right]$.

b)- *Vérifier que :* $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right);G\left(a_n\right)=n+\ln\left(a_n\right)$ *, puis en déduire* $\lim\limits_{n\to+\infty} e^n.a_n$.