Exercice 1 :(les suites)

On a : (u_n) *suite définie par :*

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{3+u_n}{5-u_n} \ (\forall n \in IN) \end{cases}$$

1. *vérifions que :* $u_{n+1} - 3 = \dfrac{4(u_n-3)}{2+(3-u_n)}$

2. *On a :*

$$u_{n+1} - 3 = \frac{3+u_n}{5-u_n} - 3 = \frac{3+u_n-3(5-u_n)}{5-u_n}$$

$$= \frac{3+u_n-15+3u_n}{2+(3-u_n)} = \frac{4u_n-12}{2+(3-u_n)}$$

$$= \frac{4(u_n-3)}{2+(3-u_n)}$$

D'où :

$$u_{n+1} - 3 = \frac{4(u_n-3)}{2+(3-u_n)} \ (\forall n \in IN)$$

Montrons par récurrence que : $((\forall n \in IN) \quad u_n < 3)$ *(I)*

- ✓ *Pour n=0 on a :* $u_0 = 2 < 3$
  donc la proposition(I) est vérifiée.
- ✓ *Supposons que pour* $(n \in IN)$ *la proposition(I) est vérifiée, et montrons qu'elle l'est aussi pour (n+1).*

On a : $u_{n+1} - 3 = \dfrac{4(u_n-3)}{2+(3-u_n)}$

Et comme $(u_n - 3 < 0)$ *donc :* $4(u_n-3) < 0$ *et* $2+(3-u_n) > 0$

D'où $(u_{n+1} - 3 < 0)$ *donc :* $(u_{n+1} < 3)$

Alors la proposition(I) est vérifiée pour (n+1).

<u>Conclusion :</u>

On a montré par récurrence que : $((\forall n \in IN) \quad u_n < 3)$

2. (v_n) *une suite définie par :* $v_n = \dfrac{u_n - 1}{3-u_n} \quad (\forall n \in IN)$

   a) *Montrons que* (v_n) *une suite géométrique. on a :*

- $u_{n+1} - 1 = \dfrac{3+u_n}{5-u_n} - 1 = \dfrac{3+u_n-(5-u_n)}{5-u_n} = \dfrac{3+u_n-5+u_n}{5-u_n} = \dfrac{2u_n-2}{5-u_n} = \dfrac{2(u_n-1)}{5-u_n}$

- $3 - u_{n+1} = 3 - \dfrac{3+u_n}{5-u} = \dfrac{3(5-u_n)-(3+u_n)}{5-u} = \dfrac{12-4u_n}{5-u} = \dfrac{4(u_n-3)}{5-u}$

D'où : $v_{n+1} = \dfrac{2(u_n-1)}{\cancel{5}+\cancel{u_n}} \times \dfrac{\cancel{5}-\cancel{u_n}}{4(3-u_n)} = \dfrac{1}{2}v_n$

<u>Conclusion :</u> une suite géométrique de raison $q=\dfrac{1}{2}$ est de premier terme $v_0=\dfrac{u_0-1}{3-u_0}=1$.

On en déduit : $\left((\forall n\in IN)\ v_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$

a) Montrons que $u_n=\dfrac{1+3v_n}{1+v_n}\quad(\forall n\in IN)$

On a :

$$\begin{aligned} v_n=\frac{u_n-1}{3-u_n} &\Leftrightarrow v_n(3-u_n)=u_n-1\\ &\Leftrightarrow 3v_n-v_nu_n=u_n-1\\ &\Leftrightarrow u_n+v_nu_n=1+3v_n\\ &\Leftrightarrow u_n=\frac{1+3v_n}{1+v_n}\end{aligned}$$

conclusion : $(\forall n\in IN)\ u_n=\dfrac{1+3v_n}{1+v_n}$

Ecrivons u_n en fonction de n.

On a : $\left((\forall n\in IN)\ v_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$ donc : $u_n=\dfrac{1+3\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}\quad(\forall n\in IN)$

c) Déterminons la limite de (u_n). On a : $u_n=\dfrac{1+3\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}\quad(\forall n\in IN)$

(Et comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=0$ car $-1<\dfrac{1}{2}<1$) alors : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$

Exercice 2

(la géométrie dans l'espace)

On considère les points A(2,1,3), B(3,1,1) et C(2,2,1).

1. a) Montrons que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ On a ; $\overrightarrow{AB}(1,0,-2)$ et $\overrightarrow{AC}(0,1,-2)$

Donc : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}0&1\\-2&-2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1&0\\-2&-2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}\vec{k}$

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=(0+2)\vec{i}-(-2+0)\vec{j}+(1-0)\vec{k}$

D'où : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$

b) $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(2,2,1)$ est un vecteur normale au plan et en déduit que $2x+2y+z+d=0$ est une équation cartésienne du Plan (ABC) et On a A(2,1,3) appartient au plan (ABC) donc

$2\times 2+2\times 1+3+d=0 \Rightarrow d=-9$

ce qui l'équation cartésienne du plan (ABC) : $2x+2y+z-9=0$.

2. a) Montrons que $\Omega(1,-1,0)$ est le centre de(S) et que son rayon est r = 6.

L'équation de (S) est $x^2+y^2+z^2-2x+2y-34=0$

Donc : $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-0)^2-36=0$

$$(x-1)^2+(y+1)^2+(z-0)^2=6^2$$

Ce qui montre que (S) a pour centre $\Omega(1,-1,0)$ et rayon r = 6.

b) Montrons que $d(\Omega,(ABC))=3$

On a :
$$d(\Omega,(ABC))=\frac{|2\times(1)+2\times(-1)+(0)-9|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}$$
$$=\frac{|-9|}{\sqrt{9}}=3$$

on en déduit que le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle (T) car $d(\Omega,(ABC))=3<6$.

3. a) (Δ) est la droite qui passe par Ω et qui est perpendiculaire au plan (ABC),donc $\vec{n}(2,2,1)$ est un vecteur directeur de(Δ) , Ω un point qui lui appartient, une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+2t \quad (t\in IR) \\ z=t \end{cases}$$

b) Déterminons les coordonnées du point intersection du plan (ABC) et la droite (Δ) ,ces coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+2t \qquad (t\in IR) \\ z=t \\ 2x+2y+z-9=0 \end{cases}$$

En remplaçant x , y et z par leurs valeurs en fonction de t on obtient

$2(1+2t)+2(-1+2t)+t-9=0$

Donc $9t-9=0$ donc $t=1$

<u>Conclusion :</u> le point d'intersection de (P) et (Δ) est bien le point B(3,1,1) est qui est le centre du cercle (T).

Exercice 3

(les nombres complexes)

1. Soit l'équation : $z^2-4z+29=0$

Le discriminant : $\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times1\times29$

$=16-116\ =-100$

On a $\Delta<0$ donc l'équation admet deux solutions complexes :

$$z_1=\frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}=2+5i \qquad z_2=\frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}=2-5i$$

D'où $S=\{2-5i,2+5i\}$

2. a) on a :

$u=b-\omega$

$=(5+8i)-(2+5i)$

$=3+3i$

D'où : $u=3+3i$

on a : $|u|=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$

Et (posons θ un argument de u)

$$\begin{cases}\cos\theta=\frac{3}{|u|}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta=\frac{3}{|u|}=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

$arg(u)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

b) On a :

donc : $arg(\overline{u})\equiv-arg(u)[2\pi]$ d'où : $arg(\overline{u})\equiv-\frac{\pi}{4}[2\pi]$

c) On a: $a-\omega=(5+2i)-(2+5i)$

$=3-3i$

D'où : $a-\omega=\overline{u}$ Et on a :

$\Omega B=|b-\omega|=|u|$ et $\Omega A=|a-\omega|=|\overline{u}|$

donc : $\Omega A=\Omega B$

$$\text{On a : } \frac{b-\omega}{a-\omega}=\frac{u}{\overline{u}}\Leftrightarrow \arg\left(\frac{b-\omega}{a-\omega}\right)\equiv\arg\left(\frac{u}{\overline{u}}\right)[2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{b-\omega}{a-\omega}\right)\equiv\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)[2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{b-\omega}{a-\omega}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

D'où : $arg\left(\frac{b-\omega}{a-\omega}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

d) d'après ce qui précède, on a :

$\Omega A=\Omega B$ et $arg\left(\frac{b-\omega}{a-\omega}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

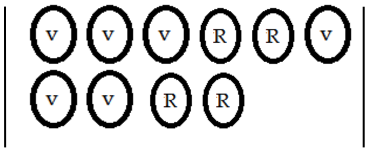
Ce qui veut dire : $\Omega A=\Omega B$ et $\left(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

et puisque R est une rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$ alors R(A)=B.

Conclusion : B est l'image de A par la rotation R.

Exercice 4

(la probabilité)



•*On tire 2 boules simultanément*

1. $Card\Omega = C_{10}^2 = 45$

A ''les 2 boules tirées sont rouges''

$$P(A) = \frac{C_4^2}{45} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$$

2. a)

Cas possibles	Valeurs de X
RR	2
VV	4
RV	3

Donc l'ensemble des valeurs prises par X est $\{2,3,4\}$.

b) $(X=3)$: *On tire une boule rouge et une boule verte .Donc :*

$$p(X=3) = \frac{C_4^1 \times C_6^1}{45} = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$$

Pour déterminer la loi de probabilité de X on calcule $p(X = x_i)$

$$\neg P(x=2) = P(A) = \frac{2}{15}$$

$$\neg P(x=3) = \frac{8}{15}$$

$$\neg P(x=4) = \frac{C_6^2}{45} = \frac{15}{45} = \frac{5}{15}$$

$$\sum_{i=1}^{3} p(X = x_i) = 1$$

D'où :

x_i	2	3	4
$p(X=x_i)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{5}{15}$

Probléme

(Etude de fonction)

Partie I :

$$f(x) = 2x - 2 + e^{2x} - 4e^x$$

1. a) $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-2) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$ Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

b) *Pour tout réel x on a :*

$$f(x) - (2x-2) = e^{2x} - 4e^x \text{ et } \lim_{x\to-\infty}\left(e^{2x} - 4e^x\right) = 0$$

D'où $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(2x-2)\right)=0$

donc la droite (D) d'équation $y=2x-2$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$.

2. a) on a :

$(\forall x\in IR)\ f(x)=2x-2+\left(e^x-4\right)e^x$ ($\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-2)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{2x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{2x}=+\infty$)

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

b) on a : $(\forall x\in IR^*)\ \dfrac{f(x)}{x}=2-\dfrac{2}{x}+\left(e^x-4\right)\dfrac{e^x}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\dfrac{2}{x}\right)=2$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-4\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$

donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$

D'où la courbe (C_f) admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ de direction l'axe des ordonnées.

3. a) $(\forall x\in IR)\ f'(x)=2+2e^{2x}-4e^x$

$$=2\left(e^{2x}-2e^x+1\right)$$

$$=2\left(e^x-1\right)^2$$

b) On en déduit que :

$\left(\forall x\in IR^*\right)\ f'(x)>0$ et $f(0)=0$

Donc f est strictement croissante sur IR .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	-5	$+\infty$

c) ¬ $f(1)=e^2-4e=e(e-4)$

donc : $f(1)<0$ (car $e<4$

¬ $f(\ln 4)=2\ln 4-2+e^{2\ln 4}-4e^{\ln 4}=2\ln 4-2+e^{\ln 16}-4\times 4$

$=2(\ln 4-1)$

donc : $f(\ln 4)>0$ (car $\ln 4>1=\ln e$)

on a : f continue et strictement croissante sur l'intervalle $[1;\ln 4]$ et $f(1)\times f(\ln 4)<0$

donc d'âpres le théorème des valeurs intermédiaires il existe un réel unique α appartenant à l'intervalle $]1;\ln 4[$ qui vérifie l'équation $f(x)=0$

4. a) on a : $(\forall x\in IR)$ $f(x)-(2x-2)=e^x\left(e^x-4\right)$ donc $f(x)-(2x-2)$ est du même signe que $\left(e^x-4\right)$ (car $e^x>0$) on a :

$$\begin{cases} e^x - 4 < 0 \Leftrightarrow x < \ln 4 \\ e^x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > \ln 4 \end{cases}$$ *(la fonction exponentielle est strictement croissante)*

x	$-\infty$		$\ln 4$		$+\infty$
$f(x)-(2x-2)$		$-$	0	$+$	

Conclusion : (C_f) *est au-dessous de la droite (D) sur l'intervalle* $]-\infty;\ln 4]$ *et au-dessus de la droite (D) sur l'intervalle* $[\ln 4;+\infty[$

b) $f''(x) = \left(2\left(e^x-1\right)^2\right)' = 2\times 2\left(e^x-1\right)'\left(e^x-1\right)$

$$=4e^x\left(e^x-1\right)$$

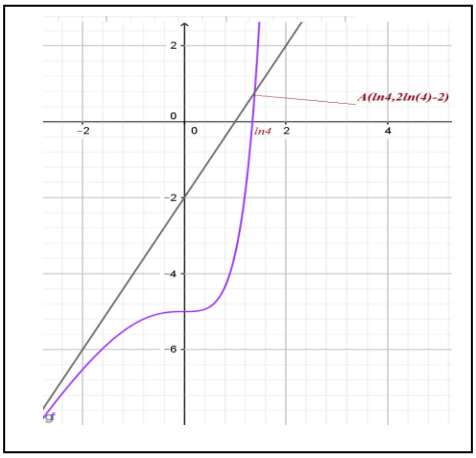
dressons un tableau de signe pour f'' *:*

x	$-\infty$		0 $\left(e^x=1\right)$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

¬ f'' *s'annule en 0 en changeant de signe et f(0)=-5 donc le point A(0,-5)est un point d'inflexion unique pour la courbe* (C_f) .

c)*construction de* (C_f)

- ¬ *f strictement croissante sur IR*
- ¬ *x=ln4 asymptote verticale (+∞)*
- ¬ *y=2x-2 asymptote oblique(-∞)*
- $f''(x) > 0 \quad x \in [\ln 4;+\infty[$
- ¬ $f''(x) < 0 \quad x \in]-\infty;\ln 4]$
- ¬ *A(0,-5) point d'inflexion*
- ¬ $f'(0)=0$



5. a) on a : $\int_0^{\ln 4}\left(e^{2x}-4e^x\right)dx = \left[\dfrac{e^{2x}}{2}-4e^x\right]_0^{\ln 4}$

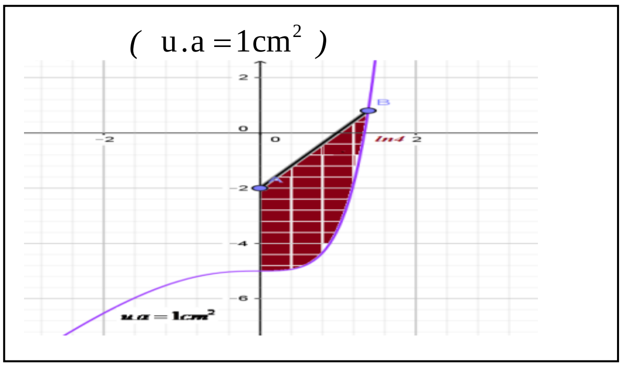
$$=\left(\frac{e^{2\ln 4}}{2}-4e^{\ln 4}\right)-\left(\frac{e^{2\times 0}}{2}-4e^0\right)$$

$$=-\frac{9}{2}$$

b) on a : $A=\left(\int_0^{\ln 4}\left|f(x)-(2x-2)\right|dx\right)\text{u.a}$

x	$-\infty$		$\ln 4$		$+\infty$
$f(x)-(2x-2)$		$-$	0	$+$	

$$Donc : A = \left(\int_0^{\ln 4}(2x-2)- f\left(x\right)dx\right)cm^2$$
$$= \left(\int_0^{\ln 4} -\left(e^{2x}-4e^{x}\right)\,dx\right)cm^2$$
$$= -\left(-\frac{9}{2}\right)cm^2$$
$$D'où : A = 4{,}5\ cm^2$$



Partie II :

1. a) $y''-3y'+2y=0$ (E)

L'équation caractéristique de (E) est :

$r^2-3r+2=o$; $\Delta=3^2-4\times1\times2=1$

Les solutions sont : $r_1=1$ et $r_2=2$

Donc les solutions de (E) sont de la forme :

$(\forall x\in IR)\ \ g(x)=\alpha e^{2x}+\beta e^{x}\ \left((\alpha,\beta)\in IR^2\right)$

La solution général de (E) est de la forme
$' = \alpha e^{r_1x}+\beta e^{r_2x}$ où
$\alpha,\beta)\in IR^2$

b) *On vérifiant les conditions initiales*

α *et* β *sont solutions du système :*

$$\begin{cases} g'(0)=-2 \\ g(0)=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha+\beta=-2 \\ \alpha+\beta=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=1 \\ \beta=-4 \end{cases}$$

D'où $(\forall x\in IR)\ \mathrm{g}(x)=\mathrm{e}^{2x}-4e^{x}$

2. $h(x)=\ln\left(e^{2x}-e^{x}\right)\quad\left(\forall x\in\,]\ln 4;+\infty[\right)$

a) • *h est dérivable sur* $]\ln 4;+\infty[$ *est*

$$\boxed{h'(x)=\frac{\left(e^{2x}-4e^{x}\right)'}{e^{2x}-4e^{x}}=\frac{2e^{2x}-4e^{x}}{e^{2x}-4e^{x}} =\frac{2\left(e^{x}-2\right)}{e^{x}-4}}$$

$x>\ln 4 \iff \mathrm{e}^{x}>4>2$

donc : $\mathrm{e}^{x}-2>0$ *et* $\mathrm{e}^{x}-4>0$

$\left(\forall x\in\,]\ln 4;+\infty[\right)\ \ h'(x)>0$

D'où h est croissante sur $]\ln 4;+\infty[$

•h continue et croissante sur $]\ln 4;+\infty[$ donc admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur

$h(]\ln 4;+\infty[)$ et $h(]\ln 4;+\infty[)=\left]\lim\limits_{\substack{x\to\ln 4\\ x>\ln 4}} h(x);\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)\right[$

D'où :

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to(\ln 4)^+}\left(e^{2x}-4e^{x}\right)=0^+\\ \lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty\end{cases}$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to(\ln 4)^+} h(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty\end{cases}$$

Et

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to(\ln 4)^+}\left(e^{2x}-4e^{x}\right)=0^{-}\\ \lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty\end{cases}$$

Donc : $h(]\ln 4;+\infty[)=]-\infty;+\infty[=IR$

<u>Conclusion :</u> h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur IR.

b) • $e^{2\ln 5}-4e^{\ln 5}=e^{\ln 5}\left(e^{\ln 5}-4\right)=5(5-4)=5$

Donc : $h(\ln 5)=\ln 5$

•$\left(h^{-1}\right)'(ln5)=\dfrac{1}{h'\left(h^{-1}(\ln 5)\right)}$ et comme $h(\ln 5)=\ln 5$

donc $h^{-1}(\ln 5)=\ln 5$

D'où : $\left(h^{-1}\right)'(ln5)=\dfrac{1}{h'(ln5)}=\dfrac{1}{\dfrac{2\left(e^{\ln 5}-2\right)}{e^{\ln 5}-4}}=\dfrac{1}{6}$

$$\boxed{\text{alors on a : } \left(h^{-1}\right)'(ln5)=\frac{1}{6}}$$