



guessmaths

Série n°24 d'exercices corrigés sur limites et continuité 2ème Bac SM

Exercice 1:

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x\sqrt{4x^2 + 3x - 7} - 2x^2)$

2. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt{10x^2 + 9} - 7}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x^2 + 5} - 5} \right)$

3. $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{|x^2 - 2x| - 8}{x^2 - 5x + 4} \right)$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{\sqrt{x^4 + 1}} - x)$

5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sqrt{x^4 + 1} - \sqrt{x^4 - 1}}{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}} \right)$

6. $\lim_{x \rightarrow a^+} \left(\frac{\sqrt{x^2 - ax} + \sqrt{x^2 - a^2}}{\sqrt{x - a}} \right) \quad a \in \mathbb{R}_+^*$

Exercice 2

Calculer les limites suivantes :

1- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) \cdot \sin(2x)}{1 - \cos(x)}$

2- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3(x) - \sin^3(x)}{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$

3- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x) \cdot \sin(2x)}{\cos(2x) + 1}$

4- $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 3x + 2) \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

5- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\tan(x)} - \sqrt{\tan(2x)}}{\sqrt{\tan(3x)} - \sqrt{\tan(4x)}}$

6- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x^2} \quad (a, b) \in (\mathbb{R}^*)^2$

Solution

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x\sqrt{4x^2 + 3x - 7} - 2x^2)$

Pour x suffisamment grand pour que : $4x^2 + 3x - 7 \geq 0$; on a :

$$x\sqrt{4x^2 + 3x - 7} - 2x^2 = x(\sqrt{4x^2 + 3x - 7} - 2x)$$

$$= x \left(\frac{(\sqrt{4x^2 + 3x - 7} - 2x)(\sqrt{4x^2 + 3x - 7} + 2x)}{\sqrt{4x^2 + 3x - 7} + 2x} \right)$$

$$= x \left(\frac{4x^2 + 3x - 7 - 4x^2}{\sqrt{4x^2 + 3x - 7} + 2x} \right)$$

$$= x^2 \left(\frac{3 - \frac{7}{x}}{\sqrt{4 + \frac{3}{x} - \frac{7}{x^2}} + 2} \right)$$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x\sqrt{4x^2 + 3x - 7} - 2x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{3 - \frac{7}{x}}{\sqrt{4 + \frac{3}{x} - \frac{7}{x^2}} + 2} \right) = +\infty$

(car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3 - \frac{7}{x}}{\sqrt{4 + \frac{3}{x} - \frac{7}{x^2}} + 2} \right) = \frac{3}{4}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$)

2- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3(x) - \sin^3(x)}{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$

On a : $\cos^3(x) - \sin^3(x) = (\cos(x) - \sin(x))(\cos^2(x) + \cos(x)\sin(x) + \sin^2(x))$

$$= (\cos(x) - \sin(x)) \left(1 + \frac{\sin(2x)}{2} \right)$$

$$= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(x) - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(x) \right) \left(1 + \frac{\sin(2x)}{2} \right)$$

$$= \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \left(1 + \frac{\sin(2x)}{2} \right)$$

$$\text{D'où pour } x \neq \frac{\pi}{4} : \frac{\cos^3(x) - \sin^3(x)}{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2} \left(1 + \frac{\sin(2x)}{2}\right)$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3(x) - \sin^3(x)}{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sqrt{2} \left(1 + \frac{\sin(2x)}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$3- \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x) \cdot \sin(2x)}{\cos(2x) + 1}$$

$$\begin{aligned} \text{Pour } x \neq \frac{\pi}{2} ; \text{ on a : } \frac{\sin(x) \cdot \sin(2x)}{\cos(2x) + 1} &= \frac{2\sin^2(x) \cdot \cos(x)}{2\cos^2(x)} \\ &= \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)} \\ &= \sin(x) \times \tan(x) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \blacktriangleright \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\sin(x) \cdot \sin(2x)}{\cos(2x) + 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} (\sin(x) \times \tan(x)) = -\infty$$

$$(\text{car } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} (\tan(x)) = -\infty \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1)$$

$$\blacktriangleright \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin(x) \cdot \sin(2x)}{\cos(2x) + 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\sin(x) \times \tan(x)) = +\infty$$

$$(\text{car } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\tan(x)) = +\infty \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1)$$

$$4- \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 3x + 2) \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

$$\text{Pour } x \neq 1 ; \text{ on a : } \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \frac{-1}{\tan\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right)}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } (x^2 - 3x + 2) \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right) &= \frac{-(x-1)(x-2)}{\tan\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right)} \\ &= \frac{-(x-2)}{\frac{\pi}{2}x \cdot \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right)}{\frac{\pi}{2}(x-1)}} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 3x + 2) \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-2)}{\frac{\pi}{2}x \cdot \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right)}{\frac{\pi}{2}(x-1)}}$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right)}{\frac{\pi}{2}(x-1)} = 1 ; \text{ on pose } X = \frac{\pi}{2}(x-1)$$

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 3x + 2) \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \frac{2}{\pi}$$

$$5- \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\tan(x)} - \sqrt{\tan(2x)}}{\sqrt{\tan(3x)} - \sqrt{\tan(4x)}}$$

Pour $x \neq 1$; on a :

$$\text{Donc } \frac{\sqrt{\tan(x)} - \sqrt{\tan(2x)}}{\sqrt{\tan(3x)} - \sqrt{\tan(4x)}} = \frac{\sqrt{x} \left(\frac{\sqrt{\tan(x)}}{\sqrt{x}} - \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{\tan(2x)}}{\sqrt{2x}} \right)}{\sqrt{x} \left(\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{\tan(3x)}}{\sqrt{3x}} - \sqrt{4} \times \frac{\sqrt{\tan(4x)}}{\sqrt{4x}} \right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{\sqrt{\tan(x)}}{\sqrt{x}} - \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{\tan(2x)}}{\sqrt{2x}} \right)}{\left(\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{\tan(3x)}}{\sqrt{3x}} - \sqrt{4} \times \frac{\sqrt{\tan(4x)}}{\sqrt{4x}} \right)}$$

Et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\tan(ax)}}{\sqrt{ax}} = 1$ où $a \in \mathbb{R}_+^*$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\tan(x)} - \sqrt{\tan(2x)}}{\sqrt{\tan(3x)} - \sqrt{\tan(4x)}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} = \frac{\left(\frac{\sqrt{\tan(x)}}{\sqrt{x}} - \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{\tan(2x)}}{\sqrt{2x}} \right)}{\left(\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{\tan(3x)}}{\sqrt{3x}} - \sqrt{4} \times \frac{\sqrt{\tan(4x)}}{\sqrt{4x}} \right)}$ et •

$$= \frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{4}}$$

$$= \frac{(1 - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{4})}{3 - 4}$$

$$= (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{3} + \sqrt{4})$$

6- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x^2} \quad (a, b) \in (\mathbb{R}^*)^2$

Pour $x \neq 0$; on a : $\cos(ax) - \cos(bx) = -2\sin\left(\frac{ax+bx}{2}\right)\sin\left(\frac{ax-bx}{2}\right)$

$$= -2\sin\left(\frac{(a+b)x}{2}\right)\sin\left(\frac{(a-b)x}{2}\right)$$

Donc $\frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x^2} = -2 \frac{\sin\left(\frac{(a+b)x}{2}\right)}{x} \times \frac{\sin\left(\frac{(a-b)x}{2}\right)}{x}$

$$= -2 \frac{(a+b)}{2} \times \frac{(a-b)}{2} \times \frac{\sin\left(\frac{(a+b)x}{2}\right)}{\frac{(a+b)x}{2}} \times \frac{\sin\left(\frac{(a-b)x}{2}\right)}{\frac{(a-b)x}{2}}$$

$$= -\frac{(a^2 - b^2)}{2} \times \frac{\sin\left(\frac{(a+b)x}{2}\right)}{\frac{(a+b)x}{2}} \times \frac{\sin\left(\frac{(a-b)x}{2}\right)}{\frac{(a-b)x}{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{(a^2 - b^2)}{2} \times \frac{\sin\left(\frac{(a+b)x}{2}\right)}{\frac{(a+b)x}{2}} \times \frac{\sin\left(\frac{(a-b)x}{2}\right)}{\frac{(a-b)x}{2}} \right) \\ &= -\frac{(a^2 - b^2)}{2} \end{aligned}$$

$$\left(\text{car } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{(a+b)x}{2}\right)}{\frac{(a+b)x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{(a-b)x}{2}\right)}{\frac{(a-b)x}{2}} = 1 ; \text{ en posant une fois } X = \frac{(a+b)x}{2} \text{ et une}$$

$$\text{deuxième fois } X = \frac{(a-b)x}{2}$$

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{Calculer : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x) \times \cos(2x) \times \dots \times \cos(nx)}{x^2}$$

Exercice 4 :

Calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos\left(\frac{\pi \tan x}{3x}\right) \right)$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sin \left(\frac{\pi x^2 - 4x + 3}{4x^2 + 7} \right) \right)$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sin \left(\sqrt{\frac{2x^2}{1 - \cos x}} \right) \right)$$

Solution :

$$1) \text{ On a : } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\pi \tan x}{3x} \right) = \frac{\pi}{3} \text{ et la fonction } x \mapsto \cos(x) \text{ est continue en } \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos \left(\frac{\pi \tan x}{3x} \right) \right) = \cos \left(\frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2}$$

$$2) \text{ On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi x^2 - 4x + 3}{4x^2 + 7} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi x^2}{4x^2} \right) = \frac{\pi}{4}$$

et la fonction $x \mapsto \sin(x)$ est continue en $\frac{\pi}{4}$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sin \left(\frac{\pi x^2 - 4x + 3}{4x^2 + 7} \right) \right) = \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$3) \text{ On a : } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x^2}{1 - \cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\frac{1 - \cos x}{x^2}} \right) \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x^2}{1 - \cos x} \right) = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4 ; \text{ la fonction } x \mapsto \sqrt{x} \text{ est continue en } 4$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{\frac{2x^2}{1 - \cos x}} \right) = \sqrt{4} = 2$$

et la fonction $x \mapsto \sin(x)$ est continue en 2

$$\text{par suite } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sin \left(\sqrt{\frac{2x^2}{1 - \cos x}} \right) \right) = \sin(2)$$

Exercice 5 :

Montrer que l'équation : $4x^3 - 3x - \frac{1}{2} = 0$ admet une racine dans chacune des intervalles suivants : $\left]-1; -\frac{1}{2}\right[$; $\left]-\frac{1}{2}; 0\right[$ et $]0; 1[$

Solution :

On considère la fonction g tel que $g(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$

g est continue sur $\mathbb{R}$ (car c'est une fonction polynôme) ; donc continue sur tout intervalle de $\mathbb{R}$

- On a : $g(-1) = -\frac{3}{2}$ et $g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ donc : $g\left(-\frac{1}{2}\right) \times g(-1) < 0$

d'après le (T.V.I) il existe $\alpha_1 \in \left]-1; -\frac{1}{2}\right[$ tel que : $g(\alpha_1) = 0$

- On a : $g(0) = -\frac{1}{2}$ et $g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ donc : $g\left(-\frac{1}{2}\right) \times g(0) < 0$

d'après le (T.V.I) il existe $\alpha_2 \in \left]-\frac{1}{2}; 0\right[$ tel que : $g(\alpha_2) = 0$

- On a : $g(0) = -\frac{1}{2}$ et $g(1) = \frac{1}{2}$ donc : $g(0) \times g(1) = -\frac{1}{4} < 0$

d'après le (T.V.I) il existe $\alpha_3 \in]0; 1[$ tel que : $g(\alpha_3) = 0$

donc l'équation : $4x^3 - 3x - \frac{1}{2} = 0$ admet 3 racines différentes dans chacune des

intervalles : $\left]-1; -\frac{1}{2}\right[$; $\left]-\frac{1}{2}; 0\right[$ et $]0; 1[$

Exercice 6 :

1) Montrer que l'équation : $x^3 + x + 1 = 0$ admet une racine unique dans $]-1; 0[$

2) Etudier le signe de $(x^3 + x + 1)$ sur $]-1;0[$.

Solution :

1) On considère la fonction h tel que : $h(x) = x^3 + x + 1$

• On a : h est continue sur (car c'est une fonction polynôme) donc continue sur $]-1;0[$

• On a : $h(-1) = -1$ et $h(0) = 1$ donc : $h(-1) \times h(0) < 0$

• $h'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ Sur $]-1;0[$ donc h est strictement croissante sur $]-1;0[$

Donc : d'après le (T.V.I) l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique dans $]-1;0[$

2) h est strictement croissante sur $]-1;0[$

Donc pour $x \in]-1;\alpha[$; on a : $h(x) < h(\alpha)$ et $h(\alpha) = 0$; d'où $h(x) < 0$

Donc pour $x \in]\alpha;0[$; on a : $h(x) > h(\alpha)$ et $h(\alpha) = 0$; d'où $h(x) > 0$

Conclusion : $x^3 + x + 1$ est négatif sur $]-1;\alpha[$; et positif sur $]\alpha;0[$

Exercice 7 :

Montrer que l'équation $\cos x = x$ admet au moins une racine dans l'intervalle : $I = [0; \pi]$

Solution :

On a : $\cos x = x \Leftrightarrow \cos x - x = 0$

On pose : $f(x) = \cos x - x$

• On a : f est continue sur $\mathbb{R}$ (car c'est la différence de deux fonctions continues) donc continue sur I

• On a : $f(\pi) = -(1 + \pi)$ et $f(0) = 1$ donc : $f(0) \times f(\pi) < 0$

Donc : d'après le (T.V.I) il existe $\alpha \in]0;\pi[$ tel que : $f(\alpha) = 0$ càd $\cos \alpha = \alpha$

Exercice 8 :

Montrer que l'équation : $1 + \sin x = x$ admet au moins une racine dans l'intervalle : $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right]$

Solution :

$$1 + \sin x = x \Leftrightarrow 1 + \sin x - x = 0$$

On pose : $g(x) = 1 + \sin x - x$

• On a : g est continue sur $\mathbb{R}$ (car c'est la différence de deux fonctions continues) donc continue sur $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right]$

• On a : $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 - \frac{\pi}{2} > 0$ et $g\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 - \frac{2\pi}{3} < 0$ donc : $g\left(\frac{\pi}{2}\right) \times g\left(\frac{2\pi}{3}\right) < 0$

Donc : d'après le (T.V.I) il existe $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right]$ tel que : $g(\alpha) = 0$ càd $1 + \sin \alpha = \alpha$