

Exercice 1: (4 Pts)

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par:
$$\begin{cases} a_0 = 4 \\ a_{n+1} = \frac{5a_n - 4}{a_n + 1} \end{cases} ; \forall n \in \mathbb{N} ;$$

1) a) Calculer a_1 .

b) Montrer par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}); a_n > 2$.

2) a) Vérifier que: $(\forall n \in \mathbb{N}); a_{n+1} - a_n = \frac{-(a_n - 2)^2}{a_n + 1}$.

b) En déduire la monotonie de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$; puis justifier qu'elle est convergente.

3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}: a_n = \frac{1}{a_n - 2}$.

a) Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $r = \frac{1}{3}$.

b) Exprimer a_n en fonction de n , puis en déduire que: $(\forall n \in \mathbb{N}); a_n = \frac{4n + 12}{2n + 3}$.

c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ en justifiant la réponse.

4)- On pose pour tout $n \in \mathbb{N}: S_n = a_0 a_1 + a_1 a_2 + \dots + a_{n-1} a_n$.

Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}): S_n = \frac{n^2 + 7n + 6}{3}$, puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(S_n)}{\ln n}$.

Exercice 2: (5 Pts)

I- On considère dans l'ensemble \mathbb{C} l'équation: $(E): z^2 - 2(1 - \sqrt{2})z + 2(2 - \sqrt{2}) = 0$

1) a) Montrer que le discriminant de (E) est: $\Delta = -4$.

b) En déduire les solutions z_1 et z_2 de (E) tels que: $\text{Im}(z_1) < 0$.

2) a)- Calculer $|z_1|$, puis montrer que: $(1+i) \cdot z_1 = -\sqrt{2} \times \bar{z}_1$.

b) Déduire z_1 sous forme trigonométrique, puis calculer $\cos\left(\frac{11\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{11\pi}{8}\right)$.

II- On considère les points E, F et G d'affixes respectifs: $z_E = 1+i$, $z_F = 1-i$ et $z_G = -i\sqrt{3}$

1) Soit N l'image de F par l'homothétie h de centre G et de rapport 2.

Montrer que l'affixe de N est: $z_N = 2 + i(\sqrt{3} - 2)$.

2) Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

On pose: $A = r(G)$ et $C = r(N)$.

Montrer que: $z_A = \sqrt{3}$ et $z_C = 2 - \sqrt{3} + 2i$.

3) Soit t la translation de vecteur $\vec{w}(2i)$.

On pose: $B = t(N)$ et $D = t(G)$.

Montrer que: $z_B = 2 + i\sqrt{3}$ et $z_D = (2 - \sqrt{3})i$.

4) a) Montrer que E est milieu de $[AC]$ et de $[BD]$. Que peut-on déduire?

b) Vérifier que: $\frac{z_C - z_E}{z_B - z_E} = i$, puis en déduire la nature du triangle BCE .

c) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$? Justifier la réponse.

Exercice 3 :

Une urne contient 4 boules blanches, et 5 noires.

On tire Successivement trois boules de l'urne au hasard et sans remise

1) déterminer le nombre de tirages possibles : $\text{card}(\Omega)$

2) déterminer la probabilité des événements suivants :

B "tirer trois boules blanches"

N "tirer trois boules noirs"

M "tirer trois boules de même couleur "

D "d'obtenir trois boules de couleurs différentes"

E "tirer 2 boules blanches seulement"

Problème : (11 Pts)

I- Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; g(x) = x - \frac{1}{x} - 2 \ln x$

1) a) Montrer que : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; g'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2}$.

b) En déduire la monotonie de g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

2) Calculer $g(1)$, puis justifier que: $\forall x \in]0; 1] ; g(x) \leq 0$ et que : $\forall x \in [1; +\infty[; g(x) \geq 0$

II- On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par: $(\forall x \in]0; +\infty[)$

$$; f(x) = x + \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2$$

1) a) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$, puis en déduire que: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

b) Calculer: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x$; puis en déduire que la courbe (C_f) admet au

voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction la droite (Δ) d'équation: $y = x$.

2) a) Vérifier que : $(\forall x \in]0; +\infty[); f(x) = \frac{x^2 + 1 - 4(\sqrt{x} \ln \sqrt{x})^2 - 2}{x}$.

b) En déduire que: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ et donner une interprétation géométrique de ce résultat.

3) a) Montrer que : $(\forall x \in]0; +\infty[); f'(x) = \frac{g(x)}{x}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

4) a) Construire la courbe (C_f) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

b) Montrer géométriquement que l'équation $(E): \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2 = 0$ admet une unique solution α dans $]0; +\infty[$.

5) Soit h la restriction de f à l'intervalle $[1; +\infty[$.

a) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur $]0; +\infty[$.

b) Construire la courbe $(C_{h^{-1}})$ dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

6) a) Montrer que la fonction $K: x \mapsto x \ln x - x$ est une primitive de la fonction $k: x \mapsto \ln x$ sur $]0; +\infty[$.

b) En déduire que : $\int_1^e \ln(x) dx = 1$.

c) En utilisant une intégration par parties, calculer la surface délimitée par la courbe (C_f) , la droite (Δ) et les droites d'équations: $x = 1$ et $x = e$