Dénombrements pratiques

Exercice 1 - Groupe d'étudiants

A leur entrée en L_1, les étudiants choisissent une langue (anglais ou allemand) et une option (informatique, chimie ou astronomie). Dans un groupe d'étudiants, 12 étudiants sont inscrits en astronomie, 15 en chimie, 16 étudient l'allemand. Par ailleurs, 8 inscrits en astronomie et 3 inscrits en informatique étudient l'anglais, 6 inscrits en chimie étudient l'allemand. Indiquer la répartition des étudiants par discipline, ainsi que le nombre total d'étudiants dans le groupe.

Corrigé

Ce genre d'exercices se traite très facilement en utilisant un tableau à double entrée dans lequel on inscrit les informations à notre disposition :

	Astronomie	Informatique	Chimie	Total
Anglais	8	3		
Allemand			6	16
Total	12		15	

On complète alors le tableau de proche en proche de sorte d'obtenir les bons totaux sur chaque ligne et chaque colonne. Par exemple, sur la première ligne de la colonne "Chimie", on peut facilement inscrire le chiffre 9. On obtient donc

	Astronomie	Informatique	Chimie	Total
Anglais	8	3	9	20
Allemand	4	6	6	16
Total	12	9	15	36

Exercice 2 - Triangles

On trace dans un plan $n \geq 3$ droites en position générale (c'est-à-dire que deux droites ne sont jamais parallèles, et 3 droites ne sont jamais concourantes). Combien de triangles a-t-on ainsi tracé?

Corrigé

Un triangle est déterminé par 3 droites (ses côtés). Il y a autant de triangles que de possibilités de choisir 3 droites parmi n, c'est-à-dire A_n^3.

Exercice 3 - Podium!

Une course oppose 20 concurrents, dont Émile.

1. *Combien y-a-t-il de podiums possibles?*
2. *Combien y-a-t-il de podiums possibles où Émile est premier?*
3. *Combien y-a-t-il de podiums possibles dont Émile fait partie?*
4. *On souhaite récompenser les 3 premiers en leur offrant un prix identique à chacun. Combien y-a-t-il de distributions de récompenses possibles?*

Corrigé

1. *Pour le premier, on a* 20 *choix possibles, pour le second* 19 *, pour le troisième* 18. *Le nombre de podiums possibles est donc égal à* $20\times19\times18=6840$
2. *Le premier concurrent est Emile. Pour les autres places, il y a* 19 *puis* 18 *choix possibles; Le nombre de podiums ainsi constitués est de* $19\times18=342$.
3. *Il y a trois choix possibles pour la place d'Emile. Une fois ce choix fixé, il y a* 19 *choix possibles pour la première des deux autres places, puis* 18 *choix possibles pour la seconde des deux autres places. Le nombre de podiums vérifiant ces conditions est donc de 3×19×183×19×18*$3\times19\times18=1026$.
4. *L'ordre n'est plus important, et on cherche le nombre de choix de 3 concurrents parmi 20, c'est-à-dire* $C_{20}^{3}=1140$.

Exercice 4 - Les boulangeries

Dans une ville, il y a quatre boulangeries qui ferment un jour par semaine.

1. *Déterminer le nombre de façons d'attribuer un jour de fermeture hebdomadaire?*
2. *Reprendre la même question si plusieurs boulangeries ne peuvent fermer le même jour.*
3. *Reprendre la même question si chaque jour, il doit y avoir au moins une boulangerie ouverte.*

Corrigé

1. *Pour chaque boulangerie, il y a 7 choix possibles. Il y a donc* 7^4 *façons d'attribuer un jour de fermeture hebdomadaire à chaque boulangerie.*

2. *On peut procéder comme suit pour dénombrer le nombre de possibilités. La première boulangerie peut fermer n'importe quel jour de la semaine, ce qui lui laisse 7 choix. La seconde boulangerie peut fermer n'importe quel autre jour : 6 choix. La troisième ne peut pas fermer l'un des jours déjà choisi, ce qui lui laisse 5 choix, et pour la dernière, il ne reste que 4 choix. Le nombre de possibilités est donc* $7\times6\times5\times4$.

3. *On va raisonner par différence, et compter plutôt le nombre de possibilités pour que toutes les boulangeries ferment le même jour : il y a 7 choix (on choisit juste le jour de fermeture commun). Le nombre de possibilités pour qu'il y ait au moins une boulangerie ouverte chaque jour est donc* 7^4-7.