Correction de l'examen national 2019 session normal

PC-SVT

Sujet de maths

Exercice 1 (géométrie dans l'espace).

$A(1;-1;-1)$; $B(0;-2;1)$ et $C(1;-2;0)$

1) a) $\vec{AB}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$ $\quad \vec{AC}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$

donc : $\vec{AB}\wedge\vec{AC} = \begin{vmatrix}-1 & -1\\2 & 1\end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix}-1 & 0\\2 & 1\end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix}-1 & 0\\-1 & -1\end{vmatrix}\vec{k}$

$= (-1+2)\vec{i} - (-1)\vec{j} + (1)\vec{k}$

$\boxed{\vec{AB}\wedge\vec{AC} = \vec{i}+\vec{j}+\vec{k}}$

b) Comme le vecteur $(\vec{AB}\wedge\vec{AB})$ est un vecteur normal au plan (ABC) ; d'où :

Soit $M(x;y;z) \in (ABC) \iff \vec{AM}.(\vec{AB}\wedge\vec{AC}) = 0$

$\iff \begin{pmatrix}x-1\\y+1\\z+1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 0$

$\iff x-1+y+1+z+1 = 0$

Donc l'équation $x+y+z+1=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

2ème méthode

On a $(\vec{AB}\wedge\vec{AC})$ est normal au plan (ABC) donc l'équation du plan (ABC) s'écrit :

$x+y+z+d=0$

et d est déterminer par l'appartenance de l'un des points A, B ou C au plan (ABC).

prenons le point A ; on obtient :

$1-1-1+d=0$ d'où $d=1$.

et parsuite :

$x+y+z+1=0$ est une équation cartesienne du plan (ABC).

2) $(S) : x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z+1=0$

On a $M(x;y;z)\in(S) \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z+1=0$

$$\Leftrightarrow (x^2-4x+4)+(y^2+2y+1)+(z^2-2z+1)=5$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=5$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2}=\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow \Omega M=\sqrt{5} \quad \text{avec } \Omega(2;-1;1)$$

Donc (S) est la sphère de centre $\Omega(2;-1;1)$ et de rayon $R=\sqrt{5}$.

3) a) On a : $$d(\Omega;(ABC))=\frac{|x_\Omega+y_\Omega+z_\Omega+1|}{\|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\|}$$

$$=\frac{|2-1+1+1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}.$$

b) Comme $d(\Omega;(ABC))<\sqrt{5}=R$ alors le plan (ABC) coupe la sphére selon un cercle (Γ).

Exercice 2 (Nbres Complexes)

1) Soit (E) : $z^2 - 2z + 4 = 0$

On a : $\Delta = 4 - 16 = -12$

donc les solutions de (E) sont :

$$z_1 = \frac{2 - i\sqrt{12}}{2} = 1 - i\sqrt{3}$$

$$z_2 = \overline{z_1} = 1 + i\sqrt{3}$$

Alors : $S = \{1 - i\sqrt{3} ; 1 + i\sqrt{3}\}$.

2) $A(a = 1 - i\sqrt{3})$; $B(b = 2 + 2i)$; $C(c = \sqrt{3} + i)$ et $D(d = -2 + 2\sqrt{3})$

a) On a : $a - d = 1 - i\sqrt{3} + 2 - 2\sqrt{3}$

$$= 3 - 2\sqrt{3} - i\sqrt{3} = -\sqrt{3}(2 - \sqrt{3} + i)$$

et $c - d = \sqrt{3} + i + 2 - 2\sqrt{3}$

$$= 2 - \sqrt{3} + i$$

D'où $\boxed{a - d = -\sqrt{3}(c - d)}$

b) les points $A(a = 1 - i\sqrt{3})$; $C(c = \sqrt{3} + i)$ et $D(d = -2 + 2\sqrt{3})$

On a : $a - d = -\sqrt{3}(c - d) \iff \frac{a - d}{c - d} = -\sqrt{3}$

$$\iff \arg\left(\frac{a-d}{c-d}\right) \equiv \pi \, [2\pi].$$

$$\iff (\overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{CD}) \equiv \pi \, [2\pi]$$

Donc les points A ; C et D sont alignés.

3) $H(h)$ et $P(p)$ tel que : $p = a - c$

$R(O ; \frac{-\pi}{3})$; On a : $M'(z') = R(M(z))$

$$\iff (z' - 0) = (z - 0)\, e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\iff z' = z\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$\iff z' = z\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})z$$
$$= \frac{1}{2}az$$

Donc $M'(z') = R(M(z)) \iff \boxed{z' = \frac{1}{2}az}$

4) a) $H(h) = R(B) \iff h = \frac{1}{2}ab$.

$$\iff h = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})(2 + 2i)$$
$$= (1 - i\sqrt{3})(1 + i)$$
$$= i(-i - \sqrt{3})(1 + i)$$
$$= i(-i - \sqrt{3} + 1 - i\sqrt{3})$$
$$= i((1 - i\sqrt{3}) - (\sqrt{3} + i))$$
$$= i(a - c)$$
$$= ip$$

donc $\boxed{h = ip}$

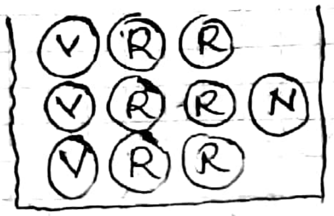
b) On a : $h = ip \iff \frac{h}{p} = i$

$$\iff \begin{cases} \arg\left(\frac{h}{p}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi] \\ |h| = |p| \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (\overrightarrow{OH}; \overrightarrow{OP}) \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi] \\ OH = OP \end{cases}$$

$\iff$ le triangle OHP est rectangle et isocèle en O.

Exercice 3 (Probabilité)



On tire simultanément trois boules ; donc : $Card\ \Omega = C_{10}^{3} = 120$

1) •) A « Obtenir 3 boules Vertes »

alors $Card\ A = C_3^3 = 1$ d'où : $\boxed{P(A) = \frac{1}{120}}$

•) B « Obtenir 3 boules de même couleur »

On tire donc 3 boules vertes ou 3 boules Rouges ; donc :

$Card\ B = C_3^3 + C_6^3 = 1 + 20 = 21$

d'où : $P(B) = \frac{21}{120} = \frac{7}{40}$ $\boxed{P(B) = \frac{7}{40}}$

2) C « Obtenir au moins 2 boules de même couleur »

On travaillera avec l'évènement contraire :

$\overline{C}$ « tirer une boule de chaque couleur »

donc $Card\ \overline{C} = C_3^1 + C_6^1 + C_1^1 = 3 + 6 + 1 = 10$

d'où : $P(\overline{C}) = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}$

par suite : $P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$

$$\boxed{P(C) = \frac{11}{12}}$$

Problème :

Première partie

$(\forall x \in]0;+\infty[)$; $f(x) = x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$

1) On a : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2\right)$

$= +\infty$. $\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty}$

Car $\left(\lim_{x\to 0^+} (-\ln x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to 0^+} (\ln x)^2 = +\infty\right)$

Interprétation géometrique :

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ donc (C) admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

2) a) On a pour tout $x \in]0;+\infty[$:

$f(x) = x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln(x))^2$

$= x + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\ln x - 1\right)\ln x$.

b) donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(x + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\ln x - 1\right)\ln x\right)$

$= +\infty$ $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

$\left(\text{Car } \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\ln x - 1\right) = +\infty\right)$.

c) pour tout $x \in]0;+\infty[$; on a :

$\frac{(\ln x)^2}{x} = \frac{(2\ln\sqrt{x})^2}{(\sqrt{x})^2}$

$= 4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$

Donc : $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} 4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$ on pose $t = \sqrt{x}$

$x \to +\infty$ alors $t \to +\infty$

$= \lim_{t\to+\infty} 4\left(\frac{\ln t}{t}\right)^2 = 0$

$\left(\text{Car } \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t} = 0\right)$

d) On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

alors calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ pour étudier la branche parabolique au voisinage de $+\infty$

•) On a: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{2x}-\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{2}\frac{(\ln x)^2}{x}\right)$

$= 1$

(car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2x}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x}=0$).

•). Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-x)$

On a: $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2\right)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)\ln x\right)$

$= +\infty$

(Car $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty$)

<u>Conclusion</u>

(C) admet une branche parabolique de direction la droite (Δ) d'équation $y=x$ au voisinage de $+\infty$.

3) a) On a: •) $\forall x\in\,]0;1]$ $x-1\leqslant 0$ et $\ln x\leqslant 0$

donc $(x-1)+\ln x\leqslant 0$

• $\forall x\in[1;+\infty[$ $x-1\geqslant 0$ et $\ln x\geqslant 0$

donc $(x-1)+\ln x\geqslant 0$.

b) pour tout $x \in]0;+\infty[$; on a :

$$f'(x) = \left(x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2\right)'$$

$$= 1 - \frac{1}{x} + 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{x} \times \ln x$$

$$= 1 - \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$$

$$= \frac{x - 1 + \ln x}{x}$$

Donc : $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $f'(x) = \dfrac{x-1+\ln x}{x}$

c) d'après la question 3)a) on conclut que :

$\forall x \in]0;1]$; $f'(x) \leq 0$ et $\forall x \in [1;+\infty[$; $f'(x) \geq 0$

d'où le tableau de variation de f est le suivant

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$\searrow$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	

$f(1) = \frac{3}{2}$

4) Pour tout $x \in]0;+\infty[$; On a :

$$f''(x) = \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}\right)'$$

$$= \frac{1}{x^2} + \frac{x \times \frac{1}{x} - \ln x}{x^2}$$

$$= \frac{1 + 1 - \ln x}{x^2}$$

$$= \frac{2 - \ln x}{x^2}$$

donc : $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $f''(x) = \dfrac{2 - \ln x}{x^2}$

b) On a $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $f''(x) = \dfrac{2-\ln x}{x^2}$ 9

donc f'' s'annule et change de signe en x_0 solution de l'équation $2-\ln x = 0$

donc $x_0 = e^2$; par suite (C) admet un point d'inflexion $A(e^2; f(e^2))$.

$$\left(f(e^2) = e^2 + \frac{1}{2} - \ln(e^2) + \frac{1}{2}(\ln e^2)^2 \right.$$

$$= e^2 + \frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{2} \times 4$$

$$= e^2 + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{2e^2+1}{2}$$

donc : $A\left(e^2; \dfrac{2e^2+1}{2}\right)$.

5) a) On a ; pour tout $x \in]e;+\infty[$:

$$f(x) - x = \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$$

$$= \frac{1}{2}\left((\ln x)^2 - 2\ln x + 1\right)$$

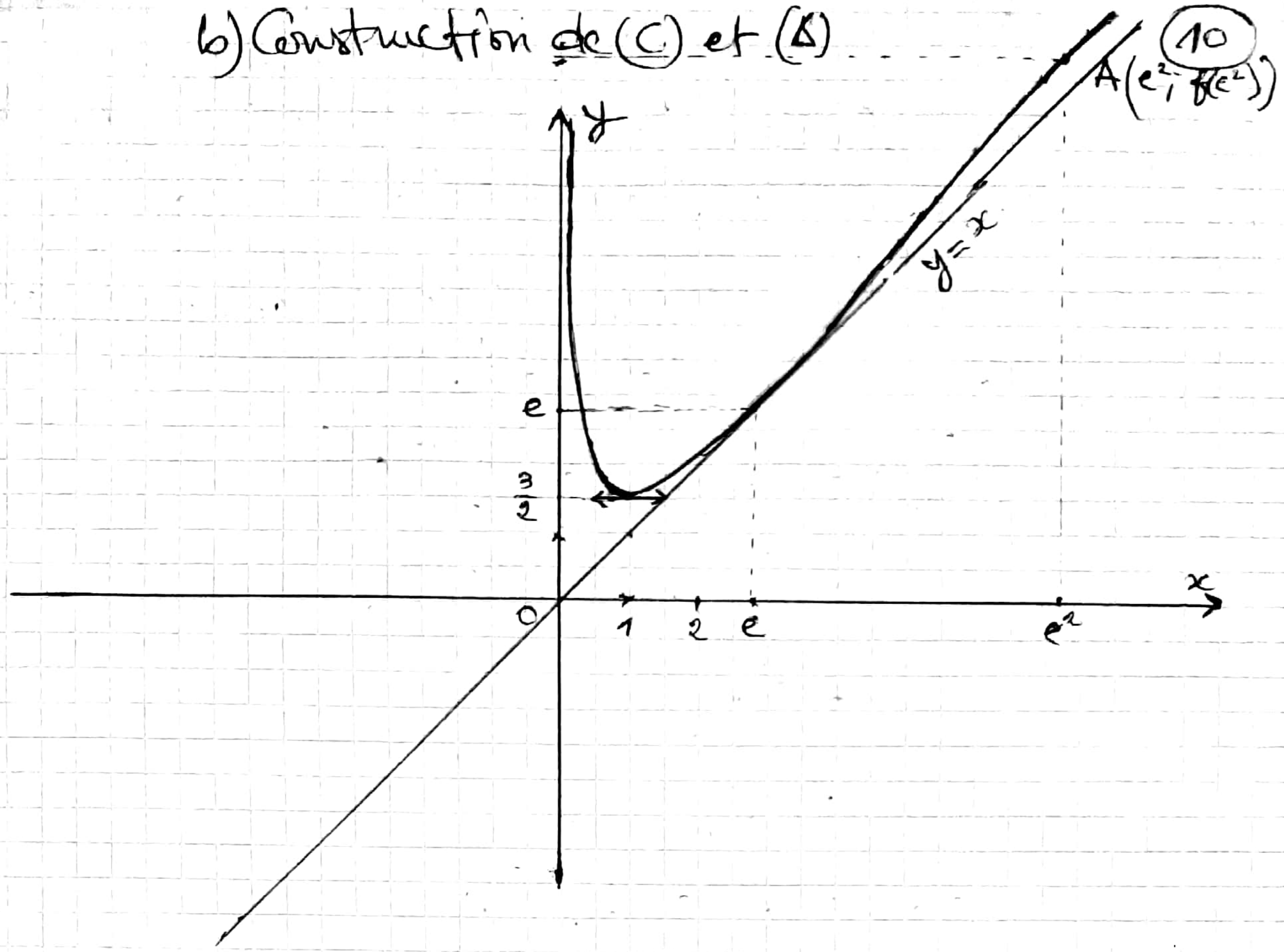
$$= \frac{1}{2}(\ln x - 1)^2$$

On en déduire que pour tout $x \in]0;+\infty[$;

$f(x) - x \geqslant 0$

Par suite (C) est au-dessus de la droite (Δ) sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

b) Construction de (C) et (Δ)



6) a) pour tout $x \in]0;+\infty[$; on a :

$$H'(x) = (x\ln x - x)'$$

$$= \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1$$

$$= \ln x + 1 - 1$$

$$= \ln x$$

donc $H : x \mapsto x\ln x - x$ est une primitive de $h : x \mapsto \ln x$ sur $]0;+\infty[$.

b) Calculons $\int_1^e (\ln x)^2 dx$.

on pose : $\begin{cases} u(x) = (\ln x)^2 & \Rightarrow \quad u'(x) = \frac{2}{x}\ln x \\ v'(x) = 1 & \Rightarrow \quad v(x) = x \end{cases}$

d'où : $\int_1^e (\ln x)^2 dx = \left[x(\ln x)^2\right]_1^e - \int_1^e x \times \frac{2}{x} \times \ln x \, dx$

11

$= e - 2\left[x\ln x - x\right]_1^e$ (Car H est une primitive de h).

$= e - 2(e - e + 1)$

$= e - 2$

d'où : $\boxed{\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2}$

c) l'aire du domaine du plan limité par (C) ; (Δ) et les droites d'équation $x=1$ et $x=e$ est :

$A = \int_1^e |f(x) - x|\, dx$

et comme $f(x) - x \geq 0$ pour tout $x \in]0;+\infty[$

alors : $A = \int_1^e f(x) - x\, dx$ (u.a)

$= \int_1^e \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2 dx$ (u.a)

$= \int_1^e \frac{1}{2} dx - \int_1^e \ln x\, dx + \frac{1}{2}\int_1^e (\ln x)^2 dx$ (u.a)

$= \left[\frac{1}{2}x\right]_1^e - \left[x\ln x - x\right]_1^e + \frac{1}{2}(e-2)$ (u.a)

$= \frac{1}{2}e - \frac{1}{2} - (e - e + 1) + \frac{1}{2}(e-2)$ (u.a)

$= \frac{1}{2}e - \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2}e - 1$ (u.a)

donc $\boxed{A = \left(e - \frac{5}{2}\right) cm^2}$

Deuxième partie :

$(u_n) : \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \; ; \; (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

1) a) Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $1 \leq u_n \leq e$.

Initialisation

Pour $n = 0$; on a $u_0 = 1$ donc $1 \leq u_0 \leq e$.

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons que $1 \leq u_n \leq e$ et montrons que

$1 \leq u_{n+1} \leq e$.

on a : $1 \leq u_n \leq e$ et f est strictement croissante sur $[1;e]$; donc :

$f(1) \leq f(u_n) \leq f(e)$ et $f(1) = \frac{3}{2}$; $f(e) = e$

d'où $\frac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq e$

par suite $1 \leq u_{n+1} \leq e$

Conclusion : On a montré par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$, $1 \leq u_n \leq e$

b) On sait que $\forall x \in]0;+\infty[$ $f(x) - x \geq 0$ et comme $1 \leq u_n \leq e$ alors pour $x = u_n$; on obtient :

$f(u_n) - u_n \geq 0$; donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$u_{n+1} \geq u_n$

Par suite (u_n) est une suite croissante.

c) (u_n) est une suite croissante majorée par e donc convergente

d) On a : $\begin{cases} f \text{ est continue} \\ f([1;e]) \subset [1;e] \\ u_0 \in [1;e]. \\ u_{n+1} = f(u_n) \\ (u_n) \text{ est convergente} \end{cases}$

(car $1 \leq f(1)$ et $f(e) = e$)

donc si : $l = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ alors l est solution de l'équation $f(x) = x$.

On sait d'après la première partie que $f(x) = x$ a pour solution e ; donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = e$.