

Exercice1 (3pts)

On considère les deux équations différentielles : $(E_0): y' - 2y = 0$ et $(E): y' - 2y = e^{2x}$

- 1) Déterminer le réel λ tel que la fonction $g: x \mapsto \lambda e^{2x}$ soit solution de l'équation (E) .
- 2) Montrer que f est solution de l'équation (E) si et seulement si $(f - g)$ est solution de (E_0) .
- 3) Résoudre chacune des équations (E_0) et (E) .

Exercice 2 (3pts)

Soit la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$; vérifiant :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) - f(x) = 2 \int_0^x f(t) dt \text{ et } f'(0) = f(0) = 1$$

- 1) Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
- 2) Montrer que f est solution de l'équation différentielle : $(F): y'' - y' - 2y = 0$
- 3) Résoudre l'équation différentielle (F) ; puis déduire l'expression de $f(x)$ en fonction de $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 (2pts)

Soit λ un réel dans l'intervalle $]0;1]$.

- 1) En utilisant une intégration par parties, Calculer $I(\lambda) = \int_{\lambda}^1 x \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) dx$
- 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} I(\lambda)$

Exercice 4 (2pts)

- 1) Montrer que : $(\forall t \in \mathbb{R}^+) ; 0 \leq 1 - \frac{1}{1+t} \leq \sqrt{\frac{t}{1+t}} \leq 1$.
- 2) Dédire que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x \sqrt{\frac{t}{1+t}} dt = 1$

Exercice 5 (3pts)

- 1) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{x} E\left(\frac{x}{\pi}\right) = 1$.
- 2) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'intégrale $I_n = \int_0^{n\pi} \sin^2(t) dt$
- 3) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x \sin^2(t) dt$ (on pourra utiliser 1) et 2)).

Exercice 6 (3 pts)

1) Soit f la fonction définie sur $I = [1; +\infty[$ par : $f(t) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} \right)$

Montrer que f réalise une bijection de I vers I ; puis définir sa fonction réciproque f^{-1} .

2) Calculer l'intégrale $F(x) = \int_{\sqrt{2}}^x \frac{1}{\sqrt{u^2 - 1}} du$ (tel que : $x \in]1; +\infty[$) en posant le changement de variable $u = f(t)$

Exercice 7 (6pts)

Soit F la fonction définie par :
$$\begin{cases} F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt & ; \text{ si } x \neq 0 \\ F(0) = 1 \end{cases}$$

1) Vérifier que $D_F = \mathbb{R}$; puis montrer que F est une fonction paire .

2) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) ; \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \leq \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt \leq x$

3) Etudier la continuité et la dérivabilité de F à droite en 0.

4) Montrer que : $(\forall t \in [1; +\infty[) ; \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$ puis déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.

5) Dresser le tableau de variation de F ; puis construire (C_F) dans un repère orthonormé.