guessmaths

Méthode
Signe d'une expression

Dans tout problème d'Analyse, il est au moins une fois question d'étudier le signe d'une expression $E(x)$ pour x variant dans un intervalle I de IR.

Par exemple :

• le sens de variation d'une fonction f sur I est parfaitement déterminé dès que l'on connaît le signe de sa dérivée f' sur I.

• La position, sur I, de la courbe représentative d'une fonction f par rapport à la courbe représentative d'une fonction g est bien déterminée dès que l'on connaît le signe de la différence $f(x)-g(x)$ sur I.

• Pour démontrer un encadrement du type : $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$ sur I, il suffit de prouver que $f(x)-g(x)\geq 0$ et $f(x)-h(x)\leq 0$ pour tout x de I.

Différents cas peuvent être considérés, mais le premier renseignement à prendre en compte est l'intervalle I sur lequel porte l'étude.

1èr cas :

l'expression $E(x)$ est déjà écrite sous une forme directement exploitable.

A) Le signe de $E(x)$ est, de manière évidente, constant sur I.

Exemple 1

$E(x)$ est définie dans $IR-\{-1\}$ par $E(x)=\dfrac{3}{(x+1)^2}$

Il est évident que $E(x)>0$ sur $]-\infty;-1[$ et sur $]-1;+\infty[$.

Exemple 2

$E(x)$ est définie sur $]1;+\infty[$ par : $E(x)=-1-\dfrac{1}{x-1}$

Pour $x>1$ on a :$x-1>0$ et donc $-\dfrac{1}{x-1}<0$. Il est clair alors que $E(x)$, somme de deux termes strictement négatifs sur $]1;+\infty[$, est strictement négatif sur cet intervalle.

B) Le signe de $E(x)$ dépend de celui d'un (ou +) de ses facteurs.

Exemple 3

$E(x)$ est définie sur IR par : $E(x)=\dfrac{3(2x+1)}{(x^2+1)^2}$

Le signe de E(x) sur $\mathbb{R}$ est le même que celui du polynôme du 1èr degré $2x+1$.

On en déduit:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$E(x)$	-	0	+

<u>2nd cas :</u>

le signe de $E(x)$ n'est pas immédiat.

Il faut alors essayer de transformer l'écriture de $E(x)$: en factorisant l'expression ou en utilisant

l'expression conjuguée dans le cas de fonctions irrationnelles. Sinon l'étude des variations de la fonction E permet de conclure dans de nombreux autres cas.

A) Il est possible de factoriser $E(x)$

<u>Exemple 4</u>

$E(x)$ est définie sur $]0;+\infty[$ par : $E(x)=x-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}$

<u>Rappel</u> :

réduire au même dénominateur, c'est aussi factoriser !

(on met alors en facteur l'inverse du dénominateur commun)

On peut écrire : pour $x>0$, $E(x)=\frac{x^4-2x^2+1}{x^3}=\frac{\left(x^2-1\right)^2}{x^3}=\frac{(x+1)^2(x-1)^2}{x^3}$

Il est clair que pour $x>0$ le signe de $E(x)$ est celui de $(x-1)^2$, soit :

x	0	1	$+\infty$
$E(x)$	+	0	+

B) Utilisation de l'expression conjuguée de $E(x)$

<u>Exemple 6</u>

$E(x)$ est définie sur $]-\infty;-1[$ par : $E(x)=\sqrt{x^2+4x+3}+x$

Multiplions et divisons $E(x)$ par son expression conjuguée $\sqrt{x^2+4x+3}-x$.

Notons que celle-ci est strictement positive si $x\geq -1$. En effet elle est la somme d'un nombre par définition positif (la racine carrée), et d'un nombre strictement positive: si $x\leq -1$ alors $-x>0$.

Nous obtenons : $E(x)=\frac{\left(\sqrt{x^2+4x+3}+x\right)\left(\sqrt{x^2+4x+3}-x\right)}{\sqrt{x^2+4x+3}-x}=\frac{4x+3}{\sqrt{x^2+4x+3}-x}$

Compte tenu de la remarque initiale, on peut affirmer que le signe de E(x) sur $]-\infty;-1]$ est celui du polynôme du 1er degré $4x+3$.

Or si $x\leq -1$ alors $4x\leq -4$ et $4x+3\leq -1$. Par suite $E(x)<0$ sur $]-\infty;-1]$.

C) *Utilisation des variations de la fonction E sur I.*

Ce cas est très fréquent dans les problèmes du BAC : l'expression $E(x)$ *n'est ni factorisable , ni transformable. L'étude des variations de la fonction E (Que l'énoncé demande bien entendu) permet de déterminer le signe de E(x).*

Exemple 7

Les variations de la fonction E dérivable sur IR sont résumées dans le tableau suivant (α *est un réel tel que* $-2,7 \le \alpha \le -2,6$ *) :*

x	$-\infty$		α		-1		3		$+\infty$
$E'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$E(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	5	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Sur l'intervalle $]-\infty;-1]$ *la fonction E est strictement croissante et* $E(\alpha) = 0$.

Donc :

$$\text{si } x < \alpha \text{ alors } E(x) < E(\alpha) \text{ soit } E(x) < 0$$

$$\text{si } -1 > x > \alpha \text{ alors } E(x) > E(\alpha) \text{ soit } E(x) > 0$$

Sur l'intervalle $[-1;+\infty[$ *la fonction E admet un minimum égal à 2.*

Donc pour $x \ge -1$ *on a :* $E(x) \ge 2$ *soit* $E(x) > 0$.

En résumé :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Signe de E(x)		$-$	0	$+$	

NB: il existe bien entendu d'autres méthodes, adaptées à des situations bien particulières, et qui n'entrent pas dans le classement proposé ci-dessus. Mais l'énoncé donne alors toutes les explications nécessaires à l'obtention du résultat cherché.