Série n°5 d'exercices corrigés « Arithmétique » **2éme Bac SM**

EXERCICE 1 :

Déterminer les entiers relatifs n tels que $n-4$ *divise* $3n-17$.

CORRECTION :

Puisque $n-4$ *divise* $3n-17$ *et que* $n-4$ *divise* $n-4$, $n-4$ *divise également* $3n-17-3(n-4)=-5$. *Or les diviseurs dans Z de* -5 *sont* $-5,-1,1,5$.

Les valeurs possibles de $n-4$ *sont donc ces valeurs, et donc on a* $n\in\{-1,3,5,9\}$.

Réciproquement, si $n=-1$, *alors* $n-4=-5$ *divise* $3n-17=-20$.

Si $n=3$, $n-4=-1$ *divise* $3n-17=-8$.

Si $n=5$, $n-4=1$ *divise* $3n-17=-2$.

Si $n=9$, $n-4=5$ *divise* $3n-17=10$.

En conclusion, les valeurs de n qui conviennent sont $-1,3,5$ *et 9.*

EXERCICE 2:

Démontrer que, pour tout entier naturel n, $3^{2n+1}+2^{4n+2}$ *est divisible par 7.*

CORRECTION :

Notons, pour $n\in IN$, *la propriété* $P(n):"3^{2n+1}+2^{4n+2}$ *est divisible par* $7"$. *Montrons par récurrence que pour tout* $n\in IN$, $P(n)$ *est vérifiée.*

Initialisation : *On a* $3^1+2^2=7$ *qui est bien divisible par 7.*

Hérédité *: Soit* $n\in IN$ *tel que* $P(n)$ *est vraie ; et montrons que* $P(n+1)$ *est vraie . Alors, on écrit :*

$3^{2n+1}+2^{4n+2}\equiv 0[7]$ *(hypothèse de récurrence)*

On a :

$$\begin{aligned}3^{2(n+1)+1}+2^{4(n+1)+2}&\equiv 3^{2n+3}+2^{4n+6}[7]\\&\equiv 3^2\times 3^{2n+1}+2^4\times 2^{4n+2}[7]\\&\equiv 9\times 3^{2n+1}+16\times 2^{4n+2}[7]\\&\equiv 2\times 3^{2n+1}+2\times 2^{4n+2}[7]\\&\equiv 2\times\left(3^{2n+1}+2^{4n+2}\right)[7]\\&\equiv 0[7]\end{aligned}$$

Ainsi, 7 divise $3^{2(n+1)+1}+2^{4(n+1)+2}$ *et donc* $P(n+1)$ *est vérifiée.*

En conclusion *:* *par le principe de récurrence,* $P(n)$ *est vraie pour tout* $n\in IN$.

EXERCICE 3 :

On cherche à trouver les solutions modulo n de l'équation $ax\equiv b[n]$, *où a, b,c sont trois entiers naturels (supérieurs ou égaux à 1). On note* $d=a\wedge n$.

Justifier que l'équation admet une solution si et seulement si d divise b.

Dans cette question, on suppose que d divise b. On note x_0 *une solution et on pose* $n=dn'$.

Démontrer que l'ensemble des solutions de l'équation est $\{x_0+qn';q\in Z\}$.

En déduire que l'équation admet exactement d solutions modulo n.

CORRECTION :

S'il existe une solution x, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ *tel que :* $ax = b + kn$ *. Mais, puisque* $d \mid a$ *et* $d \mid n$ *, alors* $d \mid b$ *. Réciproquement, supposons que :* $d \mid b$ *. Il existe* $u, v \in \mathbb{Z}$ *tels que :* $au + nv = d$ *.*

Écrivons $b = db'$ *et multiplions l'égalité de Bézout par* b' *. On obtient :* $a(ub') + n(vb') = db' = b$

Ainsi, $x = ub'$ *est solution de l'équation.*

■ *Si x est solution, alors :* $a(x - x_0) \equiv 0[n]$ *et donc :* $n \mid a(x - x_0)$ *. Notons également* $a = da'$ *et* $n = dn'$ *avec* $n' \wedge a' = 1$ *.*

Alors on $n' \mid a'(x - x_0)$ *. Puisque* $n' \wedge a' = 1$ *, on en déduit que* $n' \mid (x - x_0)$ *et donc que* $x = x_0 + qn'$ *,* $q \in \mathbb{Z}$ *. Réciproquement, si* $x = x_0 + qn'$ *, alors*

$ax \equiv b + qa'dn'[n]$ *et* $n \mid qa'dn'$ *.*

■ *On remarque que*

$$x_0 + qn' \equiv x_0 + rn'[n] \Leftrightarrow (q - r)n' \equiv 0[n]$$
$$\Leftrightarrow n \mid (q - r)n' \quad .$$
$$\Leftrightarrow d \mid (q - r)$$

Ainsi, les entiers $x_0, x_0 + n', \ldots, x_0 + (d-1)n'$ *sont tous différents modulo n, et tous les entiers* $x_0 + qn'$ *sont congrus, modulo n, à exactement un de ces entiers. On en déduit bien que l'équation admet exactement d solutions modulo n.*

EXERCICE 4 :

On considère la suite (u_n) *d'entiers naturels définie par* $u_0 = 14$ *et* $u_{n+1} = 5u_n - 6$ *.*

Quelle conjecture peut-on émettre sur les deux derniers chiffres de (u_n) *?*

Montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+2} \equiv u_n[4]$ *.*

En déduire que pour tout entier naturel k, on a $u_{2k} \equiv 2[4]$ *et* $u_{2k+1} \equiv 0[4]$ *.*

a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a $2u_n = 5^{n+2} + 3$ *.*

b) En déduire que pour tout entier naturel n, on a $2u_n \equiv 28[100]$ *.*

Valider la conjecture émise à la première question.

CORRECTION :

En utilisant un tableur, on peut conjecturer que les deux derniers chiffres de u_n *sont 14 si n est pair et 64 si n est impair.*

On a :
$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6$$
$$= 5(5u_n - 6) - 6$$
$$= 25u_n - 36$$

Écrivons cette égalité modulo 4. On trouve : $u_{n+2} \equiv u_n[4]$

puisque $25 \equiv 1[4]$ *et* $-36 \equiv 0[4]$ *. Le reste de la question se déduit par une récurrence assez élémentaire.*

a) On va prouver ce résultat par récurrence sur n. La propriété est vraie au rang 0. Si elle est vérifiée au rang n, alors

$$2u_{n+1} = 2(5u_n - 6)$$
$$= 5\left(5^{n+2} + 3\right) - 12$$
$$= 5^{n+3} + 3$$

WWW.GUESSMATHS.CO

On aurait pu aussi utiliser la forme générale du terme d'une suite géométrique.

On commence par remarquer que, pour tout $p \geq 1$ *, alors* $5^p = 25[100]$ *. C'est en effet vrai pour* $p = 1$ *, et si c'est vrai au rang p, alors*

$$5^p \equiv 25[100] \Leftrightarrow 5^{p+1} \equiv 125[100]$$
$$\equiv 25[100] \quad .$$

Ainsi, pour tout entier naturel n,

$$2u_n \equiv 5^{n+2} + 3[100]$$
$$\equiv 25 + 3[100] \quad .$$
$$\equiv 28[100].$$

D'après la question précédente, on sait que pour tout entier naturel k, on a : $2u_{2k} = 28 + 100p$ *soit* $u_{2k} = 14 + 50p$ *.*

Si $p = 2m$ *est pair, alors* $u_{2k} = 14 + 100m$ *et* $u_{2k} \equiv 14[100]$ *.*

Si $p = 2m+1$ *est impair, alors*

$$u_{2k} = 14 + 50 + 100m = 64 + 100m$$
$$= (8 + 25m) \times 4 \Rightarrow u_{2k} = 0[4]$$

et ceci contredit le résultat de la question

2. Ce n'est donc pas possible et on a bien $u_{2k} \equiv 14[100]$*.*

Pour les termes u_{2k+1} *, la preuve de la conjecture est identique.*

EXERCICE 5:

Le but de l'exercice est de déterminer tous les couples d'entiers $(m,n) \in IN^2$ *tels que* $2^m - 3^n = 1$ *.*

Déterminer le reste de la division euclidienne de 3^n *par 8 (on distinguera les cas n pair et n impair).*

En déduire que si $(m,n) \in IN^2$ *est solution de* $2^m - 3^n = 1$*, alors* $m \leq 2$ *.*

Déterminer toutes les solutions de l'équation.

CORRECTION :

On remarque que $3^2 = 9 \equiv 1[8]$ *. En utilisant les propriétés sur les congruences, on trouve que,*

- *si* $n = 2k$ *est pair,*

$$3^{2k} = (3^2)^k \equiv 1^k[8] \equiv 1[8]$$

- *si* $n = 2k+1$*est impair,*

$$3^{2k+1} = (3^2)^k \times 3 \equiv 1^k \times 3[8] \equiv 3[8].$$

Le reste de la division euclidienne de 3^n *par 8 est donc égal à 1 si n est pair et à 3 si n est impair.*

Supposons qu'il existe une solution avec $m \geq 3$ *. Alors* $2^m = 2^{m-3} \times 2^3 = 8 \times 2^{m-3} \equiv 0[8]$ *.*

On en déduit que

$$2^m - 3^n \equiv 1[8] \Rightarrow -3^n \equiv 1[8] \quad .$$

Mais ceci est impossible, puisque si n est pair, $-3^n \equiv -1[8]$ *et −1 n'est pas congru à 1 modulo 8, et si n est impair,* $-3^n \equiv -3[8] \equiv 5[8]$ *et 5 n'est pas congru à 1 modulo 8.*

Pour $m = 0$ *, on a* $2^m - 3^n = 1 \Leftrightarrow -3^n = 0$ *, ce qui n'est jamais le cas.*

Si $m = 1$*, on a :* $2^m - 3^n = 1 \Leftrightarrow 3^n = 1 \Leftrightarrow n = 0$ *. Le couple* $(1,0)$ *est donc solution.*

Si $m = 2$*, alors* $2^m - 3^n = 1 \Leftrightarrow 3^n = 3 \Leftrightarrow n = 1$ *. Le couple* $(2,1)$ *est solution. Donc les solutions sont les couples* $(1,0)$ *et* $(2,1)$ *.*

WWW.GUESSMATHS.CO

EXERCICE 6 :

Soit n un entier qui est le produit de k entiers distincts, $k \geq 1$. Démontrer que n admet au moins $\frac{k(k-1)}{2}+1$ diviseurs distincts.

CORRECTION :

Notons, pour $k \geq 1$, $P(k)$ l'hypothèse suivante : "tout entier $n \geq 1$qui est le produit de k entiers distincts possède au moins $\frac{k(k-1)}{2}+1$ diviseurs distincts". Prouvons par récurrence sur k que, pour tout $k \geq 1$, $P(k)$ est vraie.

Initialisation *: $P(1)$ est vraie, car n admet alors au moins un diviseur (lui-même), et si $k=1$, $\frac{k(k-1)}{2}+1=1$.*

Hérédité *: soit $k \geq 1$tel que $P(k)$ est vraie et prouvons $P(k+1)$. Soit n un produit de $k+1$ entiers distincts. Alors n s'écrit $n=a_1 a_2 \cdots a_{k+1}$ où $a_1 < a_2 < \cdots < a_{k+1}$. Posons $m=\frac{n}{a_{k+1}}$. Alors m est le produit de k entiers distincts, et donc m admet au moins $\frac{k(k-1)}{2}+1$ diviseurs distincts. De plus, si d est un diviseur de m, alors da_{k+1} est un diviseur de n. Notons A les diviseurs de m et $B=\{a_{k+1}d ; d \in A\}$. Alors, puisque $a_1 < a_{k+1}$, ..., $a_k < a_{k+1}$, les éléments $a_1,\ldots,a_k$ ne sont pas éléments de B alors qu'ils sont éléments de A. On sait aussi que A et B ont le même cardinal. Dans B, il y a donc au moins k éléments qui ne sont pas dans A (puisque dans A, il y a au moins k éléments qui ne sont pas dans BB). Ainsi, on a trouvé au moins k diviseurs supplémentaires de n. Ainsi, n possède au moins $\frac{k(k-1)}{2}+k=\frac{k(k+1)}{2}$ diviseurs. Ceci prouve que $P(k+1)$ est vraie.*

Conclusion : par le principe de récurrence, $P(k)$ est vraie pour tout entier k.

EXERCICE 7:

Déterminer, suivant les puissances de $n \in IN$, le reste de la division euclidienne de 2^n par 5.
Quel est le reste de la division par 5 de 1357^{2013} ?

CORRECTION

La méthode pour ce type d'exercice est toujours la même et est très importante à savoir. On commence par rechercher le premier entier $k \geq 1$ tel que $2^k \equiv 1[5]$. On va ensuite raisonner modulo k. On trouve successivement :

$$2^1 \equiv 2[5] \ , 2^2 \equiv 4[5] \ , 2^3 \equiv 3[5] \ , 2^4 \equiv 1[5] \ .$$

On va donc classer les entiers n modulo 4. En effet, si $n=4q+r$, alors sachant que 24q≡1q [5] $2^{4q} \equiv 1^q [5]$ soit $2^{4q} \equiv 1[5]$, on trouve que $2^n \equiv 2^r [5]$

Ainsi, on obtient

Si $n \equiv 0[4]$, alors $2^n \equiv 1[5]$;

Si $n \equiv 1[4]$, alors $2^n \equiv 2[5]$;

Si $n \equiv 2[4]$, alors $2^n \equiv 4[5]$;

Si $n \equiv 3[4]$, alors $2^n \equiv 3[5]$;

On commence par effectuer la division euclidienne de 1357 par 5, et on trouve que $1357 \equiv 2[5]$, d'où $1357^{2013} \equiv 2^{2013}[5]$. De plus, $2013 \equiv 1[4]$. On en déduit que $1357^{2013} \equiv 2^1 \equiv 2[5]$.

WWW.GUESSMATHS.CO