guessmaths

Série n°3 «Exercices sur Dérivation » *Terminal S*

Exercices 1 : *Calculer rapidement des dérivées avec des produits et des puissances*

Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $f(x)=(2x-3)^4(1-x^2)^7$

Correction

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ *comme fonction polynomiale ; et pour tout* $x\in\mathbb{R}$ *; on a :*

$$f'(x)=\left((2x-3)^4\right)'(1-x^2)^7+(2x-3)^4\left((1-x^2)^7\right)'$$

$$=4\times(2x-3)'(2x-3)^3(1-x^2)^7+(2x-3)^4\times7\times(1-x^2)'\times(1-x^2)^6$$

$$=(2x-3)^3(1-x^2)^6\left(4\times2(1-x^2)+(2x-3)\times7\times(-2x)\right)$$

$$=(2x-3)^3(1-x^2)^6\left(8-8x^2-14(2x^2-3x)\right)$$

$$=(2x-3)^3(1-x^2)^6\left(-36x^2+42x+8\right)$$

$$=-2(2x-3)^3(1-x^2)^6\left(18x^2-21x-4\right)$$

$$=-2(2x-3)^3(1-x^2)^6\left(x+\frac{1}{6}\right)\left(x-\frac{4}{3}\right)$$

Exercices 2 : *Calculer des dérivées avec des racines*

On considère la fonction f définie sur $[-1;2]$ *par :* $f(x)=\sqrt{-x^2+x+2}$

1) Justifier que f est dérivable sur $]-1;2[$.

2) Pour tout $x\in]-1;2[$, *calculer* $f'(x)$.

Correction

1) la fonction $u:x\mapsto -x^2+x+2$ *est dérivable sur* $]-1;2[$ *et* $u(]-1;2[)=\left]0;\frac{9}{4}\right[$

Et $v:t\mapsto\sqrt{t}$ *est dérivable sur* $\left]0;\frac{9}{4}\right[$ *; donc f est dérivable sur* $]-1;2[$ *comme composée de deux fonctions dérivables.*

2) Pour tout $x\in]-1;2[$, *On a :* $f'(x)=\left(\sqrt{-x^2+x+2}\right)'$.

$$= \frac{\left(-x^2+x+2\right)'}{2\sqrt{-x^2+x+2}}$$
$$= \frac{-2x+1}{2\sqrt{-x^2+x+2}}$$

<u>Exercices 3 :</u> *Dérivée de u^n - démonstration du cours*

On rappelle que : Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I

alors $\begin{cases} \text{la fonction } (u \times v) \text{ est dérivable sur } I \\ (u \times v)' = u' \times v + u \times v' \end{cases}$

Soit u une fonction dérivable sur I.

1) *Démontrer que u^2 est dérivable sur I et déterminer $\left(u^2\right)'$.*

2) *Démontrer que u^3 est dérivable sur I et déterminer $\left(u^3\right)'$.*

3) *Quelles conjectures peut-on faire pour la dérivée de u^n ?*
4) *Démontrer ces conjectures.*

<u>Correction</u>

1) *u^2 est dérivable sur I comme produit de deux fonctions dérivables sur I et on a :*

$\left(u^2\right)' = (u \times u)' = u' \times u + u \times u' = 2u \times u'$.

2) *de même u^3 est dérivable sur I comme produit de deux fonctions u^2 et u dérivables sur I et on a :* $\left(u^3\right)' = \left(u^2 \times u\right)'$

$$\begin{aligned} &= \left(u^2\right)' \times u + u^2 \times u' \\ &= 2u \times u' \times u + u^2 \times u' \\ &= 2u^2 \times u' + u^2 \times u' \\ &= 3u^2 \times u' \end{aligned}$$

3) *On peut pour tout $n \in \mathbb{N}$ conjecturer que la dérivée $\left(u^n\right)' = nu'u^{n-1}$*

4) *On démontre cette conjecture par récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $\left(u^n\right)' = nu'u^{n-1}$*

<u>Initialisation</u>

Pour n=0 On a : u^0 est une fonction constante donc $\left(u^0\right)' = 0$ et $\left(u^0\right)' = 0 \times u'u^{n-1} = 0$

D'où la proposition est vraie Pour n=0

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$ *; supposons que* $\left(u^{n}\right)' = nu'u^{n-1}$ *et montrons que* $\left(u^{n+1}\right)' = (n+1)u'u^{n}$

On a : $\left(u^{n+1}\right)' = \left(u^{n} \times u\right)'$

$$= \left(u^{n}\right)' \times u + u^{n} \times u'$$

Et d'après l'Hypothèse de récurrence : $\left(u^{n}\right)' = nu'u^{n-1}$

Donc $\left(u^{n+1}\right)' = nu'u^{n-1} \times u + u^{n} \times u'$

$$= nu'u^{n} + u^{n} \times u'$$
$$= \left(nu' + u'\right) \times u^{n}$$
$$= (n+1)u' \times u^{n} \quad (CQFD)$$

Conclusion

$(\forall n \in \mathbb{N})$; $\left(u^{n}\right)' = nu'u^{n-1}$

Exercices 4 : **Problème de dérivabilité avec des racines**

1) Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ *par :* $f(x) = \sqrt{x}$.

Justifier que f n'est pas dérivable en 0.

2) Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ *par :* $g(x) = x\sqrt{x}$. *Justifier que g est dérivable en* 0.

Correction

1) On a : $\lim\limits_{x \to 0^{+}} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^{+}} \dfrac{\sqrt{x}}{x}$.

$$= \lim_{x \to 0^{+}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

Donc f n'est pas dérivable en 0.

2) On a : $\lim\limits_{x \to 0^{+}} \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^{+}} \dfrac{x\sqrt{x}}{x}$

$$= \lim_{x \to 0^{+}} \sqrt{x} = 0$$

Donc g est dérivable en 0 *et* $g'(0) = 0$.

Exercices 5 : Variations d'une famille de fonctions

Pour tout entier $n \geq 1$*, on note la fonction* f_n *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f_n(x) = (x^2 - 2x)^n$.

1) Déterminer les variations des fonctions f_n *selon les valeurs de n.*

2) Démontrer que toutes les courbes représentatives des fonctions f_n *passent par 4 points fixes, c'est à dire dont les coordonnées ne dépendent pas de n. Donner les coordonnées de ces 4 points fixes.*

Correction

$(\forall x \in \mathbb{R})$ *;* $f_n(x) = (x^2 - 2x)^n$

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ *; et pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *on a :* $f_n'(x) = n(x^2-2x)'(x^2-2x)^{n-1}$

$$= 2n(x-1)(x^2-2x)^{n-1}$$

Donc si ► *n est impaire alors* $f_n'(x)$ *est du même signe que* $(x-1)$ *; d'où* f_n *est décroissante sur* $]-\infty;1]$ *et croissante sur* $[1;+\infty[$

► *n est paire alors* $f_n'(x)$ *est du même signe que* $(x-1)(x^2-2x) = x(x-1)(x-2)$

d'où le tableau de signe de $f_n'(x)$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
x		$-$	0			$+$			
$(x-1)$			$-$		0		$+$		
$(x-2)$			$-$				0	$+$	
$f_n'(x)$			$-$		0	$-$	0	$+$	

f_n *est décroissante sur* $]-\infty;2]$ *et croissante sur* $[2;+\infty[$

2) toutes les courbes représentatives des fonctions f_n *passent par 4 points fixes, ceci veut dire que l'équation* $f_n(x) = a$ *admet 4 solutions indépendamment de n*

Donc on résout les équations $(x^2-2x)^n = 0$ *ou* $(x^2-2x)^n = 1$

D'où $x^2 - 2x = 0$ *ou* $(x^2-2x)^n = 1$

D'où $x = 0$ *ou* $x = 2$ *ou* $x^2 - 2x = 1$ *ou* $x^2 - 2x = 1$

D'où $x = 0$ *ou* $x = 2$ *ou* $x^2 - 2x - 1 = 0$

D'où $x = 0$ *ou* $x = 2$ *ou* $x^2 - 2x + 1 - 2 = 0$

D'où $x=0$ *ou* $x=2$ *ou* $(x-1)^2-2=0$

D'où $x=0$ *ou* $x=2$ *ou* $\left((x-1)-\sqrt{2}\right)\left((x-1)+\sqrt{2}\right)=0$

D'où $x=0$ *ou* $x=2$ *ou* $x=1+\sqrt{2}$ *ou* $x=1-\sqrt{2}$

On conclut que les courbes représentatives des fonctions f_n *passent par 4 points fixes qui sont* $A_1(0;0)$; $A_2(1;0)$; $A_3\left(1-\sqrt{2};1\right)$ *et* $A_4\left(1+\sqrt{2};1\right)$

<u>Exercices 6 :</u> Tangente passant par un point donné

On considère la fonction f définie $\mathbb{R}$ *par :* $f(x)=\sqrt{x^2+3}$ *et on note* (C) *sa courbe représentative.*

1) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ *et calculer sa dérivée.*

2) Existe-t-il une tangente à (C) *passant par le point* $A(1;0)$ *? Justifier.*

<u>Correction</u>

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ *comme composée de deux fonctions dérivables sur* $\mathbb{R}$ *et pour tout* $x\in\mathbb{R}$ *; on a :*

$$f'(x)=\frac{\left(x^2+3\right)'}{2\sqrt{x^2+3}}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$$

2) l'équation d'une tangente à (C) *passant par le point* $\left(x_0;f(x_0)\right)$ *est :*

$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

Donc cette tangente passe par $A(1;0)$ *; si les coordonnées de A vérifient cette équation ;*

d'où : $0=f'(x_0)(1-x_0)+f(x_0)$

Donc $\dfrac{x_0}{\sqrt{x_0^{\,2}+3}}(1-x_0)+\sqrt{x_0^{\,2}+3}=0$

D'où $\dfrac{x_0-\cancel{x_0^{\,2}}+\cancel{x_0^{\,2}}+3}{\sqrt{x_0^{\,2}+3}}=0$

Donc $x_0=-3$

On conclut qu'il existe une tangente à (C) *au point d'abscisse* $x_0=-3$ *passant par le point* $A(1;0)$.

Exercices 7 : *Étude des variations d'une fonction*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ *par :* $f(x)=\dfrac{(1-x)^3}{x^2}$

Étudier les variations de la fonction f.

Correction

f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ *comme quotient de deux fonctions dérivables sur* $\mathbb{R}$ *et pour tout* $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ *; on a :*

$$f'(x)=\frac{\left((1-x)^3\right)'x^2-(1-x)^3\left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2}$$

$$=\frac{-3(1-x)^2x^2-2x(1-x)^3}{\left(x^2\right)^2}$$

$$=\frac{-x(1-x)^2\left(3x+2(1-x)\right)}{x^4}$$

$$=\frac{-(1-x)^2(x+2)}{x^3}$$

$$=\frac{(1-x)^2}{x^2}\times\frac{-(x+2)}{x}$$

Donc $f'(x)$ *est du même signe que* $\dfrac{-(x+2)}{x}$ *; d'où le tableau de signe de* $f'(x)$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x		$-$			0	$+$	
$-(x+2)$		$+$	0	$-$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc f est croissante sur $[-2;0]$ *et décroissante sur chacun des intervalles* $]-\infty;-2]$ *et* $[0;+\infty[$