Exercice 3 :

On considère la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ *par :* $f(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{x+1}}-2$ *et* (C) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1/ a- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to-1+} f(x)$

b- Etudier les branches infinies de (C)

2/ a- Montrer que :

$$(\forall x\in]-1,+\infty[)\ f'(x)=\frac{x}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$$

b- Etudier le signe de $f'(x)$ *; puis dresser le tableau de variation de f.*

3/ Construire (C) *dans le repère orthonormé* $(O,\vec{i},\vec{j})$ *(on accepte que* (C) *admet un point d'inflexion d'abscisse 2).*

4/ Soit g la restriction de f sur $]0,+\infty[$.

a- Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} *définie sur un intervalle J à déterminer.*

b- Construire la courbe de g^{-1} *dans le même repère* $(O,\vec{i},\vec{j})$.

c- Calculer $g'\left(\dfrac{1}{2}\right)$ *et* $g^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

Correction exercice 3 :

$$f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x+1}}-2\quad(\forall x\in]-1,+\infty[)$$

1/ a- Calculons $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$

On a : $\lim\limits_{x\to-1^+}\sqrt{x+1}=0^+$

Donc : $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=+\infty$

Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+2}{\sqrt{x+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{(x+2)^2}{x+1}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

b- On a $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{\sqrt{x+1}}-2\right)\times\frac{1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{x\sqrt{x+1}}-\frac{2}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+x}}-\frac{2}{x}\right)=0$$

<u>*Interprétation géométrique*</u> *: (Branches infinis)*

On a : • $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=+\infty$ *:* (C) *admet la droite d'équation* $x=-1$ *comme asymptote verticale au voisinage de* $+\infty$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ *:* (C) *admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de* $+\infty$.

2/ a- Calculons $f'(x)$

On a : $\forall x\in\left]-1,+\infty\right[\ f'(x)=\left(\dfrac{x+2}{\sqrt{x+1}}-2\right)'$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{\sqrt{x+1}-(x+2)\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{x+1}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{2(x+1)-(x+2)}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{2x\cancel{+2}\cancel{-x}\cancel{-2}}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$$

Donc : $f'(x)=\dfrac{x}{2(x+1)\sqrt{x+1}}\quad\forall x\in\left]-1,+\infty\right[$

b- Etudions le signe de $f'(x)$ *:*

On a : $f'(x)=\dfrac{x}{2(x+1)\sqrt{x+1}}\quad \forall x\in\left]-1,+\infty\right[$

On a : $\begin{cases} x+1>0 \\ \sqrt{x+1}>0 \end{cases}$

Donc $f'(x)$ *est du même signe que* x *; D'où :*

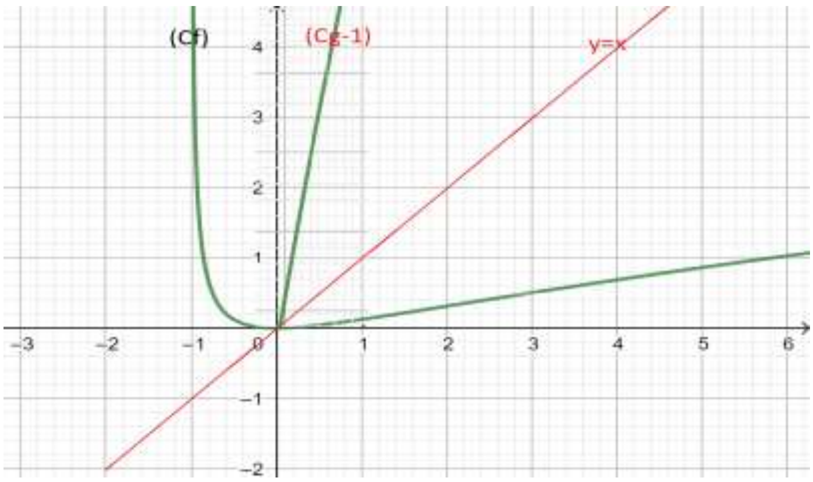
Tableau de signe de $f'(x)$ *:*

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	

Tableau de variation de $f(x)$

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(0)=0$	↗	$+\infty$

3/ Construction de (C) *:*



4/ g la restriction de f sur $\left[0,+\infty\right[$

a) *g est continue strictement croissante donc elle admet une fonction réciproque* g^{-1} *définie sur l'intervalle*

$$J = f\left([0,+\infty[\right) = \left[0, \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[= [0,+\infty[$$

b) *La courbe de* g^{-1} *est symétrique à la portion de* (C_f) *sur* $[0,+\infty[$ *par rapport à l'axe y=x.*

c) *Calculons* $g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

Soit $\begin{cases} \alpha = g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \\ \alpha > 0 \end{cases}$

$$g(\alpha) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\alpha+2}{\sqrt{\alpha+1}} - 2 = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha+2}{\sqrt{\alpha+1}} = \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha + 4 = 5\sqrt{\alpha+1}$$

$$\Leftrightarrow 4\alpha^2 - 9\alpha - 9 = 0$$

$$\Delta = 225 = 15^2 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{9-15}{8} = -\frac{3}{4} \text{ non valable} \\ \alpha_2 = \frac{9+15}{8} = 3 \end{cases}$$

D'où $g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 3$

Et on a : $\left(g^{-1}\right)'\left(\frac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{g'\left(g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)}$

$$= \frac{1}{g'(3)} = \frac{1}{f'(3)}$$

$$= \frac{2(3+1)\sqrt{3+1}}{3} = \frac{16}{3}$$

Donc : $\left(g^{-1}\right)'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{16}{3}$