Exercice 1 (2,5 points)

Soit (u_n) *la suite numérique définie par :* $\begin{cases} u_0 = -\dfrac{3}{4} \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n - 1}{2u_n + 5} \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

(0,25pt) *1) a- Vérifier que :* $u_{n+1} = 1 - \dfrac{6}{2u_n + 5}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

(0,50pt) *b- Montrer par récurrence que :* $-1 < u_n < -\dfrac{1}{2}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

(0,25pt) *2) a- Vérifier que :* $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{(u_n + 1)(2u_n + 1)}{2u_n + 5}$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

(0,50pt) *b- Montrer que la suite* (u_n) *croissante. En déduire que la suite* (u_n) *est convergente.*

(0,75pt) *3) a- Montrer que :* $\left|u_{n+1} + \dfrac{1}{2}\right| \leq \dfrac{6}{7}\left|u_n + \dfrac{1}{2}\right|$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *; puis en déduire que pour tout* $n \in \mathbb{N}$; $\left|u_n + \dfrac{1}{2}\right| \leq \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{6}{7}\right)^n$

(0,25pt) *b- Calculer* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Exercice 2 (3points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, *on considère le point* $A(0;2;0)$ *et le plan* (P) *d'équation cartésienne* $x - y + z + 5 = 0$.

(0,25pt) *1) a- Déterminer une représentation paramétrique de la droite* (D) *qui passe par le point A et qui est orthogonale au plan* (P).

(0,25pt) *b- Soit H le projeté orthogonal du point A sur le plan* (P), *montrer que le triplet des coordonnées du point H est* $(-1;3;-1)$.

2) On considère la sphère (S) *de centre A et de rayon* 3

(0,25pt) *a- Ecrire une équation cartésienne de la sphère* (S).

(0,75pt) *b- Montrer que la sphère* (S) *et le plan* (P) *se coupent selon un cercle* (C) *de rayon* $\sqrt{6}$ *dont on déterminera le centre.*

(0,50pt) *3) a- Montrer que le point* $B(1;4;-2)$ *appartient au cercle* (C)

(0,50pt) *b- Montrer que :* $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AH} = 3\vec{j} + 3\vec{k}$

(0,50pt) *c- Déterminer les équations cartésiennes des deux plans qui sont tangents à la sphère* (S) *et qui sont parallèles au plan* (ABH) .

<u>Exercice 3</u> (4,25points)

I) (0,50pt) 1) *Résoudre dans l'ensemble* $\mathbb{C}$ *des nombres complexes l'équation :* $\frac{z-4}{z}=i$,

écrire la solution sous forme algébrique .

(0,50pt) 2) *a- Résoudre dans l'ensemble* $\mathbb{C}$ *, l'équation :* $z^2-2z+4=0$.

(0,50pt) *b- Ecrire les solutions sous forme exponentielle.*

II) *Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct* $(O;\vec{u};\vec{v})$ *, on considère les points A; B; Cet D d'affixes respectives* $a=2$; $b=4$; $c=2i$; *et* $d=2+2i$

(0,75pt) 1) *Calculer* $\frac{d-b}{d}$ *; en déduire la nature du triangle* ODB.

(0,75pt) 2) *Soient E et F les points d'affixes respectives* $e=1-i\sqrt{3}$ *et* $f=1+i\sqrt{3}$

(0,75pt) *Montrer que le quadrilatère OEAF est un losange.*

3) *Soit R la rotation de centre O et d'angle* $\frac{\pi}{2}$.

Soit e' *l'affixe du point* E' *l'image du point E par la rotation R*

(0,25pt) *a- Montrer que* $e'=ie$.

(0,25pt) *b- Vérifier que :* $e-d=(\sqrt{3}+2)(e'-d)$.

(0,25pt) *c- En déduire que les points E;* E' *et D sont alignés.*

(0,50pt) *d- Soit* D' *l'image du point D par la rotation R, montrer que le triangle* $EE'D'$ *est rectangle ;*

<u>Problème</u> (10,25 points)

<u>Partie 1</u>

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $f(x)=x+1-e^{x+1}$

(C_f) *sa courbe représentative de la fonction* f *dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$ *unité 2cm*

(0,25pt) 1) *a- Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

(0,5pt) *b- Montrer que* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=-\infty$ *et donner une interprétation géométrique*

(0,25pt) 2) *a- Calculer* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

(0,25pt) *b- Montrer que la droite* (D) *d'équation* $y=x+1$ *est une asymptote de la courbe* (C_f) *au voisinage de* $-\infty$

(0,25pt) *c-Etudier la position relative de la courbe* (C_f) *et la droite* (D) .

(0,5pt) 3) *a-Calculer* $f'(x)$*, pour tout* $x\in\mathbb{R}$.

(0,5pt) *b- Montrer que la fonction f est croissante sur* $]-\infty;-1]$ *et décroissante sur* $[-1;+\infty[$.

(0,5pt) *c- Calculer* $f'(-1)$ *et donner une interprétation géométrique.*

(0,5pt) *d- Dresser le tableau de variation de la fonction f.*

(0,5pt) *e- Déterminer la valeur maximale de f. En déduire que :* $\frac{x+2}{e^x}\le e$

(0,5pt) 4) *Calculer* $f''(x)$ *puis étudier la concavité de la courbe* (C_f).

(0,75pt) 5) *a- Calculer* $f(0)$, *puis construire* (C_f) *dans le repère* $(O;\vec{i};\vec{j})$

(0,25pt) *b-Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation :*

$$\frac{x+3}{e^{x+1}}-1=0$$

6) *Soit g la restriction de la fonction f sur* $[-1;+\infty[$.

(0,50pt) *a- Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque* g^{-1} *sur un intervalle qu'on doit déterminer.*

(0,50pt) *b- Montrer que* g^{-1} *est dérivable en* $1-e$ *et que :* $\left(g^{-1}\right)'(1-e)=\dfrac{1}{1-e}$

(0,25pt) *c- Construire la courbe représentative de* g^{-1} *dans le même repère* $(O;\vec{i};\vec{j})$

(0,25pt) *d- A partir de la courbe représentative de* g^{-1}, *calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g^{-1}(x)}{x}$

(0,50pt) 7) *Montrer que l'aire du domaine limité par la courbe* (C_f), *la droite (D) et les droites d'équations :* $x=-1$ *et* $x=0$ *est:* $4(e-1)cm^2$.

Partie 2

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $\begin{cases} h(x)=x+1-e^{x+1} & si\ \ x\in]-\infty;-1] \\ h(x)=x+\sqrt{1-x^2} & si\ \ x\in]-1;1[\\ h(x)=x+\ln\left(x^3-3x+3\right) & si\ \ x\in[1;+\infty[\end{cases}$

(0,50pt) 1) *Montrer que la fonction h est continue en* -1 *et en* 1.

(0,50pt) 2) *a-Montrer que la fonction h est dérivable à droite en* 1 *et que :* $h'_d(1)=1$.

(0,50pt) *b- Etudier la dérivabilité de la fonction h à gauche en* 1.*Est-ce que la fonction h est dérivable en1 ?Justifier.*

Partie 3

(0,25pt) 1) *Montrer que:* $f(x)-x\geq 0$ *,, pour tout* $x\in]-\infty;-1]$

2) *On considère la suite numérique* (u_n) *définie par:* $\begin{cases} u_0=-2 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$ *; pour tout* $n\in\mathbb{N}$

(0,50pt) *a- Montrer par récurrence que :* $-2\leq u_n\leq -1$ *pour tout* $n\in\mathbb{N}$.

(0,25pt) *b- Montrer que la suite* (u_n) *est croissante .*

(0,50pt) *c- En déduire que la suite* (u_n) *est convergente et déterminer sa limite .*