

Sujet de révision n° 7

Problème :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x \ln \left(1 - \frac{1}{x} \right) + \ln x$

Et soit (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- 1)
 - a) Déterminer D_f le domaine de définition de f
 - b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$
 - c) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
 - d) Déterminer les branches infinies de (C_f)
- 2)
 - a) Montrer que : $(\forall x \in D_f) f'(x) = \ln \left(1 - \frac{1}{x} \right) + \frac{2x-1}{x^2-x}$
 - b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$
 - c) On accepte que : $(\forall x \in D_f) f''(x) < 0$
 Montrer que $f'(x) > 0$ $(\forall x \in D_f)$, puis dresser le tableau de variation de f .
- 3)
 - a) Vérifier que $f(3) = \ln \left(\frac{8}{9} \right)$ et $f(4) = \ln \left(\frac{81}{64} \right)$
 - b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α et que : $3 < \alpha < 4$
- 4) Tracer (C_f) (On prend $\alpha \approx 3,3$)
- 5)
 - a) Montrer que : $\int_2^3 \frac{x}{x-1} dx = 1 + \ln 2$
 - b) Montrer que : $f(x) < \ln x$
 - c) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par (C_f) , la courbe de la fonction $x \rightarrow \ln x$ et les droites d'équation $x=2$ et $x=3$

Exercice 1 :

Une caisse contient 6 boules qui portent les numéros 1,1,2,2,2,2
 (Les boules sont indiscernables au toucher)

- 1) On considère l'expérience T suivante :
 « On tire deux boules de façon aléatoire et simultanément »
 Soit X la variable aléatoire qui lie chaque tirage à la somme des numéros que portent les boules tirées.
 - a) Donner les valeurs que prend X ; puis déterminer sa loi de probabilité.
 - b) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$.

2) On considère que la caisse contient $(n+2)$ boules ; 2 boules portent le numéro 1 et n boules portent le numéro 2. On considère l'expérience E « tirer une seule boule de la caisse »

a) Calculer la probabilité pour obtenir une boule qui porte le numéro 1.

b) On répète l'expérience E , n fois en remettant chaque fois la boule dans la caisse.

— Calculer la probabilité P_n « obtenir 2 fois une boule qui porte 1 »

— Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$

Exercice 2 :

On considère la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = -\frac{9}{4u_n} + 3 \end{cases}$$

1) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n > \frac{3}{2}$

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante, puis déduire qu'elle est convergente.

c) Déterminer la limite de (u_n) .

2) Pour tout n dans $\mathbb{N}$ on pose :
$$V_n = \frac{2}{2u_n - 3}$$

a) Montrer que la suite (V_n) est géométrique de raison $\frac{2}{3}$

b) Ecrire V_n en de fonction n ; puis déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n = \frac{3}{2} \left(\frac{n+2}{n+1} \right)$

Exercice 3 :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

On considère les points $A(3,0,0)$; $B(1,0,2)$ et $C(1,2,0)$ et (S) la sphère de centre $\Omega(1,0,0)$ qui passe par A .

1) Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et déduire une équation cartésienne du plan (ABC) .

2) Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S) .

3) a) Vérifier que B et C appartiennent à (S)

b) Donner une représentation paramétrique de la droite (D) qui passe par Ω et qui est perpendiculaire à (ABC) .

c) Déterminer les coordonnées du point d'intersection du plan (ABC) et la droite (D) ; déduire le centre du cercle qui circonscrit au triangle ABC .

Exercice 4 :

On considère l'application f définie sur $\mathbb{C} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ par : $f(z) = \frac{z-2}{2z-1}$

- 1) Ecrire $f(1+i)$ sous la forme algébrique.
- 2) Montrer que : si $|z|=1$ alors $|f(z)|=1$ (on pourra calculer $\overline{f(z)}$ en fonction de z).
- 3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z)=z$ puis écrire les solutions sous forme trigonométrique.
- 4) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$; déterminer l'ensemble des points M d'affixe Z qui vérifie : $|f(z)| = \frac{1}{2}$

WWW.GUESSMATHS.CO