Exercice 5 « Limites et continuité »

Exercice 1 *Calculer les limites suivantes (avec solution)*

- $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2+x-6}$ - $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x}{1-x^3}$ - $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$
- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x}-1}$ - $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}$ - $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

Correction Exercice 5

- $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2+x-6}$ *(il y'a une indétermination ; on remarque que :* $x^2+x-6=(x-2)(x+3)$*) donc :*

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2+x-6}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}(x+3)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x+3)}=\frac{1}{5}$$

- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x}{1-x^3}$ *(il y'a une indétermination ; on remarque que*

$x^2-x=x(x-1)$ *et* $(1-x^3)=(1-x)(x^2+x+1)$

Donc :

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{1-x^3}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{(1-x)(x^2+x+1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{-x}{(x^2+x+1)}=-\frac{1}{3}$$

- $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$ *(il y'a une indétermination ; on remarque que*

$x^2-4=(x-2)(x+2)$ *Identité remarquable* $(a^2-b^2)=(a-b)(a+b)$.

Donc : $$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$$

- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x}-1}$ *(il y'a une indétermination ; Dans ce cas on utilise*

La technique du conjugué ; le conjugué de $(a-b)$ est$(a+b)$*) ; d'où :*

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\left(\sqrt{x+3}\right)^2-2^2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\left(\sqrt{x}\right)^2-1^2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+3-4)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$$
$$=\frac{1}{2}$$

¬ $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}$ *(on a une forme indéterminée ; on multiplie par le conjugue du dénominateur ; on a :*

$$\lim_{x\to3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}=\lim_{x\to3}\frac{(3-x)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{(3-x)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{\left(\left(\sqrt{x+1}\right)^2-2^2\right)}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{(3-x)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{(x+1-4)}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{(3-x)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{(x-3)}$$

$$=\lim_{x\to3}\left(-\left(\sqrt{x+1}+2\right)\right)=-4$$

¬ $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ *(on a une forme indéterminée ;on multiplie par le conjugué du numérateur) ; on a :*

$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim_{x\to4}\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{\left(\left(\sqrt{x}\right)^2-2^2\right)}{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)}{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{1}{\left(\sqrt{x}+2\right)}=\frac{1}{4}$$