

Durée : 4heures

2^{ème} Année Bac SM A et B Biof

25 mai 2021

Mathématiques
Exercice 1 (4 pts) :

Soit m est un paramètre complexe différent de 1, i et $-i$.

A) 1) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) suivante :

$$(E): z^2 - (1-i)(m+1)z - i(m^2 + 1) = 0$$

0,25 a- Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est : $\Delta = [(1+i)(m-1)]^2$

0,5 b- En déduire les solutions de l'équation (E)

0,5 2) Ecrire les solutions de l'équation (E) sous forme trigonométrique dans le cas

$$m = e^{i\alpha} \text{ où } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$$

B) On considère dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct

 $(O; \vec{i}; \vec{j})$, les points $A; B; M; M_1$ et M_2 d'affixes respectives: $i, -i, m, z_1 = 1 - mi$

et $z_2 = m - i$

0,25 1) a- Vérifier que : $i \frac{z_1}{z_2} = \frac{|m|^2 - 1 + i(m + \bar{m})}{|m - i|^2}$

0,5 b- En déduire l'ensemble des points M d'affixe m pour que les points O, M_1 et M_2 soient alignés.

2) On suppose que $m \neq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

0,25 a- Vérifier que : $\frac{z_1 - m}{z_2 - m} = m(1 - i) + i$

0,5 b- En déduire l'ensemble des points M d'affixe m pour que les droites (MM_1) et (MM_2) soient perpendiculaires .

0,5 3) a- Montrer que : $\frac{z_2 - z_1}{z_2 - m} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow R_e(m) + I_m(m) = 1$

0,25 b- Montrer que M_1 est l'image M par la rotation de centre le point

 Ω d'affixe $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

0,5 c- En déduire l'ensemble des points M d'affixe m pour que les points Ω, M, M_1 et M_2 soient cocycliques.

Exercice 2 (4 pts) :

On considère dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation $(F): x^{1933} \equiv 3 \pmod{2021}$

1 1) Montrer que 43 et 47 sont deux diviseurs premiers de 2021 .

2) Soit a un entier premier avec 2021.

0,75

En utilisant le théorème de **Fermat**, montrer que : $a^{1932} \equiv 1[2021]$

3) Soit x solution de l'équation (F)

0,5

a- Montrer que les nombres x et 2021 sont premiers entre eux .

0,5

b- En déduire que : $x \equiv 3[2021]$

4) Soit x un nombre entier relatif tel que : $x \equiv 3[2021]$

0,75

Montrer que $x^{1933} \equiv 3[2021]$

0,5

5) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (F)

Problème : (12 pts) :

Partie 1 : Soit f la fonction définie sur $D = \mathbb{R} - \{2\}$ par : $f(x) = \frac{xe^{-x}}{x-2}$

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ tel que

$$\|\vec{i}\| = 2\text{cm}$$

1

1) a- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ puis interpréter géométriquement les résultats.

0,75

b- Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis interpréter géométriquement le résultat.

0,5

2) Montrer que la fonction f est dérivable sur $] -\infty, 2[$ et sur $] 2, +\infty[$ et que :

$$(\forall x \in D) : f'(x) = \frac{(-x^2 + 2x - 2)e^{-x}}{(x-2)^2}$$

0,25

3) Dresser le tableau de variations de f .

0,25

4) a- Montrer que : $(\forall x \in D) : f''(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-2)^3} e^{-x}$

0,75

b- Montrer que l'équation $x^3 - 4x^2 + 8x - 4 = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

0,5

c- Déterminer le signe de $x^3 - 4x^2 + 8x - 4$ et en déduire que la courbe (C) admet un point d'inflexion.

0,5

5) Tracer la courbe (C) . (On prend $\alpha \approx 0,64$ et $f(\alpha) \approx -0,25$)

Partie 2 : On considère la fonction F définie sur $E =] -\infty, 0[\cup] \frac{1}{2}, 2[$ par :

$$F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x f(t) dt$$

0,75

1) a- Montrer que la fonction F est dérivable sur $] -\infty, 0[$ et que :

$$(\forall x \in] -\infty, 0[) : F'(x) = \frac{x^3(1-2x)e^{-x} + (x-2)e^{\frac{-1}{x}}}{x^2(x-2)(1-2x)}$$

On admet que F est dérivable sur $\left] \frac{1}{2}, 2 \right[$ et que :

$$\left(\forall x \in \left] \frac{1}{2}, 2 \right[\right) : F'(x) = \frac{x^3(1-2x)e^{-x} + (x-2)e^{\frac{-1}{x}}}{x^2(x-2)(1-2x)}$$

0,5 b- En déduire que la fonction F est croissante sur $]-\infty, 0[$ et décroissante sur $\left] \frac{1}{2}, 2 \right[$

2) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} g(x) = \frac{xe^{-x} - 2e^{-2}}{x-2} ; & x \neq 2 \\ g(2) = -e^{-2} \end{cases}$$

0,5 a- Montrer que la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$.

0,5 b- En déduire que : $\lim_{x \rightarrow 2^-} \int_{\frac{1}{x}}^x g(t) dt = \int_{\frac{1}{2}}^2 g(t) dt$

0,5 c- Montrer que : $\left(\forall x \in \left] \frac{1}{2}, 2 \right[\right) : \int_{\frac{1}{x}}^x g(t) dt = F(x) - 2e^{-2} \ln \left(\frac{x^2 - 2x}{1 - 2x} \right)$

0,5 d- En déduire que : $\lim_{x \rightarrow 2^-} F(x) = -\infty$

3) Soit $x \in]1, +\infty[$

0,5 a- En utilisant le changement de variable $u = -t$, montrer que :

$$F(-x) = - \int_1^x \frac{te^t}{t+2} dt + \int_1^x \frac{te^t}{t+2} dt$$

0,25 b- Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{te^t}{t+2} dt = \int_1^0 \frac{te^t}{t+2} dt$

(On pourra utiliser une primitive de $t \mapsto \frac{te^t}{t+2}$ sur $[0, 1]$)

0,5 c- Vérifier que : $\frac{t}{t+2} \geq \frac{1}{x+2}$ pour tout $t \in [1, x]$, et en déduire que :

$$\int_1^x \frac{te^t}{t+2} dt \geq \frac{e^x - e}{x+2}$$

0,25 d- En déduire que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{te^t}{t+2} dt = +\infty$

0,25 4) En déduire que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = -\infty$

0,25 5) a- Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{E}) : F\left(\frac{1}{x}\right) = -F(x)$

0,5 b- En déduire : $\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} F(x)$

6) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation (E_n) : $F(x) = \frac{1}{n}$

0,5 a- Montrer que l'équation (E_n) admet une unique solution u_n dans $] -\infty, 0[$.

0,5 b- Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

0,25 c- En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente.

0,5 d-Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1$

FIN