Exercices série n°13 sur les fonctions logarithmes

2éme Bac PC- SVT

Exercice1

Partie A: Questions de cours

1) Etudier le signe de $\ln x$

2) Donner les limites : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}$

Partie B:

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{1+\ln x}{x}$.

On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Calculer $\lim_{x\to0^+} f(x)$; Interpréter graphiquement le résultat

2) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$; Interpréter graphiquement le résultat

3) a) Montrer que pour tout $x\in]0;+\infty[$; $f'(x)=-\frac{\ln x}{x^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f

4) a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α sur $]0;+\infty[$

b) Donner un encadrement de α à 10^{-1} près.

5) Tracer la courbe e dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=1+\frac{\ln x}{x}$.

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, (unité graphique 5 cm).

1) Calculer $\lim_{x\to0^+} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Déterminer les asymptotes de $(\mathcal{C})$.

2) Dresser le tableau des variations de f

3) a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique sur l'intervalle $\left[\frac{1}{e};1\right]$, notée α .

b) Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

c) Donner, suivant les valeurs de x, le signe de $f(x)$ sur $]0;+\infty[$.

4) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par : $f(x)=\ln x-\frac{1}{\ln x}$

On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f et (Γ) la courbe d'équation $y=\ln x$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Etudier les variations de la fonction f et calculer $\lim_{x\to1^+} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2) a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\ln x\right]$

b) Etudier la positions relative de $(\mathscr{C})$ et de (Γ).

3) On se propose de chercher les tangentes à la courbe passant par le point O.

a) Soit a un réel appartenant à l'intervalle $]1;+\infty[$; montrer que la tangente T_a à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse a passe par l'origine du repère si et seulement si $f(a)-af'(a)=0$.

b) Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par : $g(x)=f(x)-xf'(x)$.

Montrer que sur $]1;+\infty[$ les équations $g(x)=0$ et $(\ln x)^3-(\ln x)^2-\ln x-1=0$ ont les mêmes solutions.

c) Après avoir étudié les variations de la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(t)=t^3-t^2-t-1$, montrer que la fonction u s'annule une fois et une seule sur $\mathbb{R}$.

d) En déduire l'existence d'une tangente unique à la courbe $(\mathscr{C})$ passant par le point O.