Exercice 1: (3 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$; On considère les points : $A(0;1;1)$; $B(-2;1;-1)$; $C(0;2;1)$.

1/ a. Soit un point de l'espace $M(x;y;z)$ Calculer $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}$.

b. Déduire que l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tel que : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}$ est une sphère (S) ; dont on déterminera le centre Ω et le rayon R.

2/ a. Déterminer les coordonnés du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

b. En déduire que les points A ;B et C ne sont pas alignés.

c. Déterminer l'équation cartésienne du plan (ABC).

3/ Déterminer la représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et orthogonal au plan (ABC)

4/ a. Calculer $d(\Omega;(ABC))$ la distance du point Ω au plan(ABC).

b. Déduire l'intersection du plan (ABC) et la sphère (S).

Exercice 2: (3 points)

1/ Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $\frac{1}{4}z^2 - z\sqrt{3} + 4 = 0$

2/ Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$.

on considère les points A et B et C d'affixes respectives: $a = 2\sqrt{3} + 2i$; $b = 2\sqrt{3} - 2i$ et $c = -8i$

a. Ecrire a sous forme trigonométrique et en déduire que a^{2022} est un nombre réel négatif.

b. Montre que : $\frac{a}{b} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ et en déduire que le triangle OAB est équilatéral.

3/ Soit z l'affixe du point M et z' l'affixe du point M' l'image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

a. Montrer que : $z' = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z$

b. Vérifier que $d = 4\sqrt{3} + 4i$ est l'affixe du point D image du point C par la rotation R.

c. Calculer $\frac{d}{a}$ et en déduire que les points O ; A et D sont alignés.

Exercice 3: (2 points)

On pose : $I = \int_0^2 \frac{2x^2 + 3x}{x+2}dx$ et $J = \int_0^2 (4x+3)\ln(x+2)dx$

1/ Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-2\}$; $\frac{2x^2+3x}{x+2} = 2x - 1 + \frac{2}{x+2}$

2/ Montrer que : $I = 2(1+\ln(2))$

3/ En utilisant une intégration par parties montrer que : $J = 2(13\ln(2)-1)$

Exercice 4: (3 points)

Un sac contient trois boules rouges et quatre boules noires et deux boules vertes (les boules indiscernables au toucher)
On tire successivement sans remise trois boules du sac.
On considère les événements suivants:
A «Les trois boules tirées sont noires »
B «Obtenir au moins une boule verte parmi les trois boules tirées »

1/ Calculer $p(A)$ et montrer que : $p(B) = \frac{7}{12}$.

2/ Soit X la variable aléatoire qui correspond au nombre des boules vertes restant dans le sac après le tirage.

a. Montrer que l'ensemble des valeurs prises par est: $\Omega(X) = \{0;1;2\}$.

b. Montrer que $p(X=1) = \frac{1}{2}$; puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X

c. Calculer l'espérance ; la variance et l'écart type de X.

Exercice 5: (9 points)

I. Soit g la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x - 1 - \ln x$.

1/ a. Calculer $g'(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$

b. Etudier les variations de la fonction g

2/ En déduire que $g(x) \geq 0$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

II. Soit la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = x^2 - x\ln x & ; \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1/ a. Etudier la continuité de f à droite en 0.

b. Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 ; et interpréter le résultat graphiquement.

3/ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; puis étudier la branche infinie de (C) au voisinage $+\infty$.

4/ a. Montrer que : $f'(x) = x + g(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

b. En déduire les variations de f sur $]0;+\infty[$.

5/ a. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est une tangente à (C) au point $A(1;1)$.

b. Etudier les positions relatives de (C) et la droite (Δ).

6/ a. Calculer $f''(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

b. Etudier la concavité de la courbe (C) et déterminer son point d'inflexion.

7/ Tracer la courbe (C) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

8/ a. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b. Montrer que f^{-1} est dérivable sur J

c. Calculer $\left(f^{-1}\right)'(1)$

d. Tracer la courbe $\left(C_{f^{-1}}\right)$ dans le même repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

III. *Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$; pour tout n de $\mathbb{N}$.*

1/ Montrer que $0 \le u_n \le 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

2/ Montrer que la suite (u_n) est croissante.

3/ Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.