Exercices d'application sur « fonction logarithmique » 2éme Bac PC

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ *; par :* $f(x)=\frac{1}{x}+\ln x$ *; et soit* (C_f) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Montrer que : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$ *; puis interpréter géométriquement le résultat.*

2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=+\infty$ *; puis interpréter géométriquement le résultat.*

3) a) Montrer que : $\forall x>0\ ;\ f'(x)=\frac{x-1}{x^2}$ *; puis dresser le tableau de variation de f.*

b) Déduire que $f(x)\geq 1$ *pour tout* $x>0$.

4) Tracer (C_f) .

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ *; par :* $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ *; et soit* (C_f) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ *; puis interpréter géométriquement le résultat.*

2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *; puis déduire la branche infinie de* (C_f)

3) a) Montrer que : $\forall x>0\ ;\ f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$

b) Etudier le signe de $f'(x)$*; puis dresser le tableau de variation de f.*

4) Tracer (C_f).

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ *; par :* $f(x)=(\ln x)^2$ *; et soit* (C_f) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ *; puis interpréter géométriquement le résultat.*

2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$*; et montrer que :* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=0$ *(on pourra poser* $x=t^2$ *) ; puis interpréter géométriquement le résultat.*

3) Etudier les variations de f.

4) Tracer (C_f).

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ *; par :* $f(x)=(x-1)\ln x$ *; et soit* (C_f) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$*; puis interpréter géométriquement le résultat.*

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$*; puis étudier la nature de la branche infinie de* (C_f) *au voisinage de* $+\infty$.

2) a) Montrer que : $\forall x>0$; $f'(x)=\ln x+\dfrac{x-1}{x}$

b) Montrer que f est décroissante sur $]0;1]$ *et qu'elle est croissante sur* $[1;+\infty[$.

c) Dresser le tableau de variations de f ; puis déduire le signe de $f(x)$

3) Tracer (C_f).

Exercice 5

Partie I

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ *; par :* $g(x)=x^3-1+2\ln x$.

1) Etudier les variations de g.

2) Calculer $g(1)$; puis déterminer le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.

Partie II

On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ *; par :* $f(x)=x-\dfrac{\ln x}{x^2}$ *; et soit* (C_f) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ *; puis interpréter géométriquement le résultat.*

2) a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

b) Montrer que la droite (Δ) *d'équation* $y=x$ *est asymptote à* (C_f) *au voisinage de* $+\infty$.

3) Montrer que : $\forall x>0$; $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ *; puis dresser le tableau de variation de f.*

4) Etudier la position relative de (C_f) *et de* (Δ).

5) Tracer (C_f).

Partie III

Soit (U_n) *la suite définie par :* $\begin{cases} U_0=2 \\ U_{n+1}=f(U_n) \quad ; \quad (\forall n\in \mathbb{N}) \end{cases}$

1) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $U_n>1$

2) Montrer que (U_n) *est une suite décroissante par deux méthodes.*

3) Déduire que (U_n) *est convergente*

4) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$