***Exercice 1*** *:*

*Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct* $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.

*On considère les points* $A(0;-2;-2)$ ; $B(1;-2;-4)$ *et* $C(-3;-1;2)$.

*1) Montrer que* $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ *et en déduire que :* $2x+2y+z-6=0$ *est une équation cartésienne du plan* $(ABC)$.

*2) On considère la sphère* $(S)$ *et* $x^2+y^2+z^2-2x-2z-23=0$ *l'une de ses équations cartésiennes*

*Vérifier que le centre de la sphère S est* $\Omega(1;0;1)$ *et son rayon est* $R=5$.

*3) a) Vérifier que :* $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2t \\ z=1+t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ *est une représentation paramétrique la droite* $(\Delta)$ *passant par* $\Omega$ *et perpendiculaire au plan* $(ABC)$.

*b) Déterminer les coordonnée du point H l'intersection de la droite* $(\Delta)$ *et du plan* $(ABC)$.

*4) Vérifier que* $d(\Omega;(ABC))=3$ *et montrer que plan coupe la sphère* $(S)$ *selon un cercle de rayon* $r=4$ *et de centre à préciser*

***Exercice 2*** *:*

*Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct* $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

*On considère la sphère* $(S)$ *de centre* $\Omega(2;1;2)$ *et de rayon* $R=3$ *et le plan* $(P)$ *passant par* $A(0;-2;-2)$ *dont* $\vec{u}(4;0;-3)$ *un vecteur normal à ce plan.*

*1) Montrer que :* $x^2+y^2+z^2-4x-2y-4z=0$ *est une équation de la sphère* $(S)$.

*2) Vérifier que :* $4x-3z+13=0$ *est une équation cartésienne du plan* $(P)$.

*a) Vérifier que :* $\begin{cases} x=2+4t \\ y=1 \\ z=2-3t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ *une représentation paramétrique la droite* $(\Delta)$ *passant par* $\Omega$ *et perpendiculaire au plan* $(P)$.

*b) Déterminer les coordonnées du point H l'intersection la droite* $(\Delta)$ *et du plan* $(P)$.

*4) a) Calculer* $d(\Omega;(P))$.

*b) Montrer que le plan* $(P)$ *est tangeant à la sphère* $(S)$ *en un point à déterminer.*

***Exercice 3 :***

*Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct* $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.

*On considère le plan* $(P)$ *passant par le point passant par* $A(0;1;1)$ *dont* $\vec{u}(1;0;-1)$ *un vecteur normal à ce plan et la sphère* $(S)$ *de centre* $\Omega(0;1;-1)$ *et de rayon* $R=\sqrt{2}$ .

*1) a) Montrer que :* $x-z+1=0$ *est une équation cartésienne du plan* $(P)$..

b) Montrer que le plan $(P)$ est tangent à la sphère $(S)$ et vérifier que le point $B(-1;1;0)$ est leur point de contact.

2) a) Déterminer une représentation paramétrique la droite $(\Delta)$ passant par $\Omega$ est perpendiculaire au plan $(P)$.

b) Montrer que la droite $(\Delta)$ est tangeante à la sphère $(S)$ en $C(1;1;0)$.

Montrer que $\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OB} = 2\vec{k}$ et en déduire l'aire du triangle $OCB$.

***<u>Exercice 4 :</u>***

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

On considère la sphère $(S)$ d'équation $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-1=0$ et le plan $(P)$ d'équation $y-z=0$

a) Montrer que $\Omega(1;1;1)$ est le centre de la sphère $(S)$ et $R=2$ est son rayon.

b) Calculer $d(\Omega;(P))$ et en déduire que plan coupe la sphère $(S)$ suivant un cercle $(C)$.

c) Déterminer le centre et le rayon du cercle $(C)$.

2 / Soit la droite $(\Delta)$ passant par $A(1;-2;2)$ est perpendiculaire au plan $(P)$.

a) Vérifier que $\vec{u}(0;1;-1)$ est un vecteur directeur de la droite $(\Delta)$.

b) Montrer que $\left\|\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u}\right\| = \sqrt{2}\left\|\vec{u}\right\|$ et en déduire que la droite $(\Delta)$ coupe la sphère $(S)$ en deux points.

c) Déterminer le triplet des coordonnées de chaque point des deux points d'intersection de la droite $(\Delta)$ et la sphère $(S)$.

***<u>Exercice 5 :</u>***

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

On considère les points $A(2;1;3)$ ; $B(3;1;1)$ et $C(2;2;1)$ ; la sphère $(S)$ d'équation cartésienne $x^2+y^2+z^2-2x+2y-34=0$.

1) a) Montrer que : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$.

b) En déduire que : $2x+2y+z-9=0$ est une équation cartésienne du plan $(ABC)$.

2) a) Montrer que le centre de la sphère $(S)$ est $\Omega(1;-1;0)$ et son rayon est $R=6$.

b) Vérifier que $d(\Omega;(ABC))=3$ en déduire que plan $(ABC)$ coupe la sphère $(S)$ selon un cercle $(\Gamma)$.

3) a) Déterminer une représentation paramétrique la droite $(\Delta)$ passant par $\Omega$ et perpendiculaire au plan $(ABC)$.

b) Montrer que $B$ est le centre du cercle $(\Gamma)$.

***<u>Exercice 6 :</u>***

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. On considère les points $A(1;3;4)$ ; $B(0;1;2)$.

1) a) Montrer que : $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = 2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$

b) Montrer que $2x-2y+z=0$ est une équation cartésienne du plan $(OAB)$.

2) Soit la sphère $(S)$ d'équation cartésienne $x^2+y^2+z^2-6x+6y-6z+2=0$.

Montrer que le centre de la sphère $(S)$ est $\Omega(3;-3;3)$ et son rayon est $R=5$.

3) a) Montrer que le plan $(OAB)$ est tangeant à la sphère $(S)$.

b) Déterminer les coordonnées du point $H$ point de contact de la sphère $(S)$ et du plan $(OAB)$.

**Exercice 7 :**

*Dans l'espace muni d'un repère orthonormé* $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

*On considère les points* $A(2;1;0)$ ; $B(-4;1;0)$.

*1) Soit le plan* $(P)$ *passant par A et* $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ *un vecteur normal à* $(P)$.

*Montrer que* $x+y-z-3=0$ *est une équation cartésienne du plan* $(P)$.

*2) Soit* $(S)$ *l'ensemble des points* $M$ *de l'espace qui vérifient* $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$.

*Montrer que* $(S)$ *est la sphère de centre* $\Omega(-1;1;0)$ *et de* $R=3$.

*3) a) Calculer* $d(\Omega;(P))$ *; en déduire que plan* $(P)$ *coupe la sphère* $(S)$ *selon un cercle* $(\Gamma)$.

*b) Montrer que le centre du cercle* $(\Gamma)$ *est le point* $H(0;2;-1)$.

*4) Montrer que :* $\overrightarrow{OH}\wedge\overrightarrow{OB}=\vec{i}+4\vec{j}+8\vec{k}$ *; en déduire l'aire du triangle* $OHB$.

**Exercice 8 :**

*Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct* $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

*On considère le plan* $(P)$ *d'équation cartésienne :* $x+y+z+4=0$ *et la sphère* $(S)$ *de centre* $\Omega(1;-1;-1)$ *et de* $R=\sqrt{3}$.

*1) a) Calculer* $d(\Omega;(P))$ *et en déduire que plan* $(P)$ *est tangent à la sphère* $(S)$

*b) Vérifier que le point* $H(0;-2;-2)$ *est le point de contact du plan* $(P)$ *et de la sphère* $(S)$.

*2) On considère les points* $A(2;1;1)$ *et* $B(1;0;1)$.

*a) Vérifier que :* $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}=\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$ *et en déduire que* $x-y-z=0$ *est une équation cartésienne du plan* $(OAB)$.

*b) Calculer* $d(\Omega;(P))$ *et en déduire que plan* $(OAB)$ *est tangeant à la sphère* $(S)$.

*3) a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite* $(D)$ *passant par* $\Omega$ *et perpendiculaire au plan* $(OAB)$.

*b) Déterminer les coordonnées du point de contact du plan* $(OAB)$ *et la sphère* $(S)$.

**Exercice 9 :**

*Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct* $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.

*On considère les points* $A(0;3;1)$ ; $B(-1;3;0)$ ; $C(0;5;0)$ *et la sphère* $(S)$ *d'équation cartésienne* $x^2+y^2+z^2-4x-5=0$.

*1) a) Montrer que :* $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$ *; en déduire que les points A ;B et C ne sont pas alignés.*

*b) Montrer que :* $2x-y-2z+5=0$ *est une équation cartésienne du plan* $(ABC)$.

*2) a) Montrer que la sphère* $(S)$ *est de centre* $\Omega(2;0;0)$ *et de rayon* $3$.

*b) Montrer que plan* $(ABC)$ *est tangeant à la sphère* $(S)$.

*c) Déterminer les coordonnées de H point de contact du plan* $(ABC)$ *et de la sphère* $(S)$.

**Exercice 10 :**

*Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct* $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.

*On considère le point* $A(0;0;1)$ *; le plan* $(P)$ *d'équation cartésienne* $2x+y-2z-7=0$ *et la sphère* $(S)$ *de centre* $\Omega(0;3;-2)$ *et de* $R=3$.

1) a)Montrer que : $\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 1-2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique la droite $(\Delta)$ passant par A et perpendiculaire au plan $(P)$.

b) Vérifier que le point $H(2;1;-1)$ est le point d'intersection du plan $(P)$ et de la droite $(\Delta)$.

2) a)Montrer que : $\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u} = 3(\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k})$ avec $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$.

b) Montrer que la distance du point $\Omega$ à la droite $(\Delta)$ est égale à $3$ ; En déduire que la droite $(\Delta)$ est tangeante à la sphère $(S)$ ; et vérifier que H est le point de contact de la droite $(\Delta)$ et de la sphère $(S)$.

**Exercice 11 :**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

On considère les points $A(-1;1;0)$ ; $B(1;0;1)$ ; $\Omega(1;1;-1)$ et la sphère $(S)$ de centre $\Omega$ et de rayon $3$.

1) a)Montrer que: $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ et vérifier que $x + y - z = 0$ est une équation cartésienne du plan $(OAB)$.

b) Vérifier que $d(\Omega;(OAB)) = \sqrt{3}$ en déduire que plan $(OAB)$ coupe la sphère $(S)$ selon un cercle $(\Gamma)$ de rayon $\sqrt{6}$.

2) Soit $(\Delta)$ la droite passant par $\Omega$ et perpendiculaire au plan $(OAB)$.

a)Montrer que : $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+t \\ z = -1-t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique la droite $(\Delta)$

b) Déterminer les coordonnées du centre du cercle $(\Gamma)$.

**Exercice 12 :**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

On considère les points $A(0;0;1)$ ; $B(1;1;1)$ ; $C(2;1;2)$ et la sphère $(S)$ de centre $\Omega(1;-1;0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.

1) Montre que : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 1 = 0$ est une équation cartésienne de la sphère $(S)$ ; et vérifier que A appartient à $(S)$.

2) a) Montrer que : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ ; en déduire que : $x - y - z + 1 = 0$ est une équation cartésienne du plan $(ABC)$.

b) Calculer $d(\Omega;(ABC))$ ; en déduire que plan $(ABC)$ est tangeant à la sphère $(S)$ en A.

2) Soit $(\Delta)$ la droite passant par $\Omega$ et perpendiculaire au plan $(ABC)$.

a) Montrer que : $\begin{cases} x = 1+t \\ y = -1-t \\ z = -t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite $(\Delta)$.

b) En déduire les coordonnée des deux points d'intersection de la droite $(\Delta)$ et la sphère $(S)$.

**Exercice 13 :**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

On considère les points $A(1;1;-1)$ ; $B(0;1;-2)$ ; $C(3;2;1)$ et la sphère $(S)$ d'équation cartésienne

$x^2+y^2+z^2-2x-2z-1=0$.

1) Montrer que la sphère $(S)$ est de centre $\Omega(1;0;1)$ et de rayon $\sqrt{3}$.

2) a) Montrer que : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} - \vec{k}$ ; en déduire que $x-z-2=0$ est une équation cartésienne du plan $(ABC)$.

b) Vérifier que $d(\Omega;(ABC))=\sqrt{2}$ ; en déduire que plan $(ABC)$ coupe la sphère $(S)$ selon un cercle $(\Gamma)$ de rayon $1$.

3) Soit $(\Delta)$ la droite passant par $\Omega$ et perpendiculaire au plan $(ABC)$.

a) Montrer que : $\begin{cases} x=1+t \\ y=0 \\ z=1-t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite $(\Delta)$.

b) Montrer que le triplet des coordonnées du point H point d'intersection de la droite $(\Delta)$ et du plan $(ABC)$ est $(2;0;0)$.

c) En déduire le centre du cercle $(\Gamma)$.