Exercice 1:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+2+\sqrt{4x+x^2}}{2}\right)$

1. Montrer que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4x+x^2}}$
2. Montrer que : $x\geq 0$; $\ln(x+1)\leq f(x)\leq \ln(x+2)$
3. Soit la fonction $h(x)=f(x)-\dfrac{1}{2}x$ sur $\mathbb{R}^+$

Etudier la variation de h sur $[1;+\infty[$ et montrer que la fonction $h(x)=0$ admet solution unique α telle que : $1<\alpha<4$

Soit (v_n) définie par : $v_0=1$ et $v_{n+1}=f(2v_n)$

4. Montrer que $1\leq v_n\leq 2$ pour tous n de $\mathbb{N}$
5. Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $\left|v_{n+1}-\dfrac{1}{2}\alpha\right|\leq \dfrac{2}{\sqrt{5}}\left|v_n-\dfrac{1}{2}\alpha\right|$
6. Déduire que (v_n) converge et calculer sa limite.

Exercice 2:

A. Montrer que : $\forall x>0$; $\dfrac{1}{x+1}<\ln(x+1)-\ln x<\dfrac{1}{x}$ Pour $n\in\mathbb{N}^*$ on pose $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+k}$

B. montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $\ln\left(2-\dfrac{1}{n+1}\right)<S_n<\ln 2$

C. Déduire que S_n converge et calculer sa limite

Exercice 3:

Soit n de $\mathbb{N}$ et x de $]0;+\infty[$ on définit : $f_n(x)=nx^2-(n+1)+\ln x$

A. Montrer que f_n est une bijection de I vers un intervalle J a déterminé

B. Montrer $\exists!\,\alpha_n$: solution de $f_n(x)=0$ dans I et justifier que $1<\alpha_n<2$

C. Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $f_n(\alpha_{n+1})=1-(\alpha_{n+1})^2$

D. Etudier la monotonie de (α_n) et déduire qu'elle converge.

E. Montrer que : $\forall x>0$; $\dfrac{x}{x+1}<\ln(x+1)<x$

F. Et déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $\dfrac{2-\alpha_n}{(1+\alpha_n).n}<\alpha_n-1<\dfrac{1}{\alpha_n(1+\alpha_n).n}$

G. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (\alpha_n - 1).n$

Exercice 4:

1. Soit $\varphi(x) = \dfrac{1+\ln x}{x}$; définie sur $]0;+\infty[$.

2. Calculer : $\lim\limits_{x\to0^+} \varphi(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)$ interpréter géométriquement les résultats

3. Calculer sur $]0;+\infty[$ $\varphi'(x)$ et dresse table de variation de φ.

4. Tracer la courbe C de φ en précisant l'intersection avec l'axe des abscisses.

5. Dans la suite n est un entier naturel tel que $n \geq 1$; on définit $\varphi_n(x) = \dfrac{1+\ln(n+x)}{x+n}$ sur $]-n;+\infty[$ et C_n sa courbe.

6. montrer que $\varphi_n(x) = \varphi(x+n)$ est déduire que C_n est l'image de C par une translation à déterminer.

7. Tracer C_1

8. Soit $g_n(x)$ définie sur $]0;+\infty[$ par : $g_n(x) = \varphi_n(x) - \varphi(x)$ montrer que :
$\forall x > 1$; $g_n(x) < 0$

9. Montrer que : $(\forall x \in]0;1[)$; $g'_n(x) < 0$

10. en déduire que $g_n(x) = 0$ admet unique solution α_n sur $]0;+\infty[$ et vérifier que $\dfrac{1}{e} < \alpha_n < 1$

11. Montrer que $n+1+\alpha_{n+1} > n+\alpha_n$

12. Comparer $\varphi(\alpha_{n+1})$ et $\varphi(\alpha_n)$

13. Montrer que la suite (α_n) est convergente

14. On note ℓ sa limite

Justifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(\alpha_n) = 0$ .et déduire la valeur de ℓ.

Exercice 5:

Soit $\begin{cases} f_k(0) = 1 \\ f_k(x) = 1 + x - k.x\ln|x| \quad ; si\ x \neq 0 \end{cases}$; où k est un paramètre réel ; est on note C_k sa courbe.

I. Etudier la continuité et la dérivabilité en 0 et est montrer que $T(0,1)$ est un centre de symétrie de C_k.

II. Etudier la branche de C_k suivant les valeurs de k.

III. Montrer que tous les C_k passent par 3 point fixe à déterminer

IV. Etudier la variation de f_k suivant les valeurs de k et dresser le tableau de variation de f_k et montrer que C_1 coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse b tel que $3 < b < 4$