Exercice 1 : (4 points)

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = \frac{1}{3}$ et $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{3-u_n}$ pour tout n de $I\!N$

0.5 1) Montrer que pour tout n de $I\!N$, $0 < u_n < 1$

0.5 2) a) Montrer que pour tout n de $I\!N$ $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)^2}{3 - u_n}$

0.5 b) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

3) On pose $v_n = \frac{1}{1-u_n}$ pour tout n de $I\!N$

0.75 a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique et déterminer sa raison et son premier terme.

0.75 b) Déterminer v_n en fonction de n et en déduire que $u_n = \frac{n+1}{n+3}$, pour tout n de $I\!N$

0.5 c) Calculer la limite de la suite (u_n)

0.5 4) A partir de quelle valeur de n, a-t-on $u_n \geq \frac{1011}{1012}$?

Exercice 2 : (5 points)

0.75 1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $z^2 - 6z + 13 = 0$

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c telles que: $a = 3+2i$; $b = 3-2i$ et $c = -1-2i$

0.5 a) Ecrire $\frac{c-b}{a-b}$ sous forme trigonométrique.

0.5 b) En déduire la nature du triangle ABC

3) Soit R la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Soit M un point du plan d'affixe z et le point M' d'affixe z' l'image de M par R, et soit D le point d'affixe $d = -3-4i$

0.5 a) Ecrire z' en fonction de z

0.25 b) Vérifier que C est l'image de A par R

0.5 4) a) Montrer que les points A, C et D sont alignés.

0.5 b) Déterminer le rapport de l'homothétie h de centre C et qui transforme A en D

0.5 c) Déterminer l'affixe m du point E pour que le quadrilatère $BCDE$ soit un parallélogramme

0.5 5) a) Montrer que $\frac{d-a}{m-b}$ est un nombre réel.

0.5 b) En déduire que le quadrilatère $ABED$ est un trapèze isocèle.

Exercice 3 : (3 points)

On considère la fonction numérique h définie sur $]0;+\infty[$ par : $h(x)=x+\ln x$

0.5 1) Montrer que la fonction h est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

0.5 2) Déterminer $h(]0;+\infty[)$

0.5 3) a) En déduire que l'équation $h(x)=0$ admet une solution unique α sur $]0;+\infty[$

0.5 b) Montrer que $0<\alpha<1$

0.5 4) a) Vérifier que $h\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha+\frac{1}{\alpha}$

0.5 b) En déduire que $h\left(\frac{1}{\alpha}\right)>2$

Problème : (8 points)

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2-xe^{-x+1}$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité : 1 cm)

0.5 1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et interpréter le résultat géométriquement.

0.5 2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

0.75 b) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}=-\infty$ et interpréter le résultat géométriquement.

0.75 3) a) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$: $f'(x)=(x-1)e^{-x+1}$

0.5 b) Dresser le tableau de variations de la fonction f

0.5 4) a) Calculer $f''(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$

0.5 b) Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion d'abscisse 2

1 5) Construire la courbe (C) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ (on prend : $f(2)\simeq 1,25$)

0.5 6) Déterminer la valeur minimale de la fonction f et en déduire que pour tout x de $\mathbb{R}$, $e^{x-1}\geq x$

0.5 7) a) En utilisant une intégration par parties, calculer : $\int_0^2 xe^{-x}\,dx$

0.5 b) En déduire que $\int_0^2 f(x)dx=4-e+3e^{-1}$

8) Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty,1]$

0.5 a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

0.75 b) Construire la courbe représentative de g^{-1} dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

0.25 c) A partir de la courbe représentative de g^{-1} , déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{g^{-1}(x)}{x}\right)$