

Problème

Partie 1 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \frac{1}{2 + \arctan x}$ et (u_n) la suite

numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

1) Montrer que l'équation : $f(x) = x$ admet une solution unique α dans $[0; +\infty[$ et que : $0 < \alpha < 1$.

2) a) Montrer que : $(\forall x \in]0; 1[) ; |f'(x)| \leq \frac{1}{4}$ et que : $f([0; 1]) \subset [0; 1]$

b) Dédire que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_n \leq 1$

3) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|$

b) Dédire que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Partie 2

Soit g_n la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $g_n(x) = \frac{1}{f\left(\frac{x}{n}\right)} + \frac{x}{2} - 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

1) a) Vérifier que : $(\forall x \geq 0) ; g_n(x) = \arctan\left(\frac{x}{n}\right) + \frac{x}{2}$ et que g_n réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^+$.

b) Montrer que l'équation $g_n(x) = 1$ admet une solution unique α_n dans $\mathbb{R}^+$ et que $0 < \alpha_n < 2$.

2) a) Montrer que : $(\forall x \geq 0) ; g_{n+1}(x) \leq g_n(x)$ puis déduire les variations de $(\alpha_n)_{n \geq 1}$.

b) Montrer que $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est convergente.

c) Calculer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\alpha_n}{n}\right)$ déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 2$

3) Montrer que : $2\alpha_n \left(\frac{\arctan\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)}{\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)} \right) = n(2 - \alpha_n)$ puis déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n(2 - \alpha_n))$

4) a) Montrer que : $(\forall x > 0) ; \arctan(x) < x$, puis déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) ; 1 < \alpha_n$

b) En appliquant le TAF à la fonction : $t \mapsto \sqrt[n]{t}$ sur l'intervalle $[1; \alpha_n]$; montrer que :

$1 < \sqrt[n]{\alpha_n} < 1 + \frac{1}{n}$; puis déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[n]{\alpha_n})$.

5) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n(\sqrt[n]{\alpha_n} - 1)) = \ln 2$