Série n ° 5 d'exercices sur les fonctions limites et continuité

Terminale S

***Exercices 1** Limites sans indétermination*

Calculer les limites des fonctions suivantes, et préciser lorsque la courbe représentative de f (notée (C_f) admet une asymptote horizontale ou verticale.

1. $f(x)=x^2+2x-3$ en $+\infty$.
2. $f(x)=x^3-6x^2+1$ en $-\infty$.
3. $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}$ en $+\infty$.
4. $f(x)=-\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}$ en $+\infty$.
5. $f(x)=(-x+3)^5$ en $+\infty$.
6. $f(x)=(-x+3)^5$ en $-\infty$.
7. $f(x)=(4-2x)^2$ en $+\infty$.
8. $f(x)=-5\sqrt{x^2-1}$ en $-\infty$
9. $f(x)=x^2-3x+1$ en 2.
10. $f(x)=\dfrac{-3}{\sqrt{2-x}}$ en 2 à gauche.
11. $f(x)=\dfrac{2x-3}{x-1}$ en 1 à gauche
12. $f(x)=\dfrac{2x-3}{x-1}$ en 1 à droite
13. $f(x)=\dfrac{5}{4-x^2}$ en -2 à gauche
14. $f(x)=\dfrac{5}{4-x^2}$ en -2 à droite.

***Exercices 2** Limite en l'infini d'un polynôme ou d'une fraction rationnelle*

Calculer les limites des fonctions suivantes, et préciser lorsque la courbe représentative de f (notée (C_f) admet une asymptote horizontale.

1. $f(x)=x^3-2x+3$ en $+\infty$.
2. $f(x)=\dfrac{x+3}{2x-1}$ en $-\infty$.
3. $f(x)=x^4+x$ en $-\infty$.
4. $f(x)=\dfrac{x^2-2}{2x+3}$ en $-\infty$.
5. $f(x)=\dfrac{2x-5}{x+x^2}$ en $+\infty$.
6. $f(x)=\dfrac{4-2x^4}{x^2(x+1)^2}$ en $-\infty$.
7. $f(x)=\dfrac{(3x+1)^2}{(2x-3)^3}$ en $+\infty$.

***Exercices 3** Limites indéterminées*

Pour chaque limite il faut trouver la bonne méthode.
Calculer les limites suivantes

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sin x\right)$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x-3}-\sqrt{x+1}$.

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos x-1}{x}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-1}-2x$.

7. $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{2x^2-5}+2x$.

8. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-5x-3}{x^2-9}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$.

10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-5}{4+\sin x}x$.

11. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2-5\cos x$.

__Exercices 4__ Asymptotes obliques

1. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$ par : $f(x)=\dfrac{2x^3-x^2-8x+7}{x^2-4}$, et on appelle (C_f) sa courbe représentative dans un repère du plan.

a) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y=2x-1$ est asymptote `a la courbe en $+\infty$.

b) Etudier les positions relatives de (C_f) et de (Δ).

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ par : $f(x)=\dfrac{x^2-x-3}{x+2}$.

On note (C_f) sa courbe.

a) Déterminer des réels a, b et c tels que : $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+2}$.

b) En déduire que (C_f) admet une asymptote en $-\infty$ et donner l'équation de cette asymptote.

3. On donne la fonction f définie sur $]-\infty;\ 0]\cup[4;+\infty[$ par : $f(x)=\sqrt{x^2-4x}\,x$.

Montrer que la droite d'équation $y=x-2$ est asymptote `a la courbe représentative de f en $+\infty$

4. a) Montrer que la courbe représentative de la fonction g, définie par : $g(x)=\dfrac{x^3+4}{x^2}$ admet une asymptote oblique en $+\infty$.

b) Déterminer sur quel ensemble l'écart entre la courbe et l'asymptote est inférieur à un centième d'unité.