SERIE D'EXERCICES CORRIGES DE LOGIQUE

Exercices 1

Montrer que pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $2^n > n$

Solution

Pour $n \geq 0$ *, notons* $P(n)$ *l'assertion suivante:* $2^n > n$

Nous allons démontrer par récurrence que $P(n)$ *est vraie pour tout* $n \geq 0$.

Initialisation

Pour n=0

nous avons $2^0 = 1$ *. Et* $1 > 0$ *. Donc* $P(0)$ *est vraie*

Hérédité:

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que $P(n)$ *est vraie, c'est-à-dire que* $2^n > n$

Montrons alors que $P(n+1)$ *est vraie, c'est-à-dire que* $2^{n+1} > n+1$

Nous avons: $2^{n+1} = 2 \times 2^n = 2^n + 2^n$

Donc nous aurons selon l 'hypothèse de récurrence, $2^{n+1} > n + 2^n$

Et puisque $2^n > 1$ *nous avons* $2^{n+1} > n+1$

Donc $P(n+1)$ *est vraie.*

Conclusion.

Nous avons montré que $P(n)$ *est vraie pour tout* $n \geq 0$*, c'est-a-direpour tout* $n \geq 0$ *on a :*

$2^n > n$

Exercices 2

1. Traduire symboliquement la proposition (P) *suivante :*

« pour tout couple de réels, si la somme et le produit de ces deux réels est rationnel, alors ces deux réels sont deux rationnels »

2. Donner la négation de la proposition (P)

3. Déterminer la valeur de vérité de la proposition (P)

Solution

$1. \left((\forall x \in \mathbb{R});(\forall y \in \mathbb{R});\left((x+y) \in \mathbb{Q} \text{ et } xy \in \mathbb{Q}\right)\right) \Rightarrow (x \in \mathbb{Q} \text{ et } y \in \mathbb{Q})$.

$2. \left((\exists x \in \mathbb{R});(\exists y \in \mathbb{R});\left((x+y) \in \mathbb{Q} \text{ et } xy \in \mathbb{Q}\right)\right) \Rightarrow (x \notin \mathbb{Q} \text{ ou } y \notin \mathbb{Q})$.

3. Donnons un contre-exemple pour montrer que (P) *est fausse.*

Prenons $x = 2+\sqrt{3}$ *et* $y = 2-\sqrt{3}$ *;* $x+y=4$ *et* $xy=1$

Donc x et y sont deux réels dont la somme et le produit sont des rationnels, sans qu'aucun d'eux ne le soit Donc (P) *est une proposition fausse*

Exercices 3

1. Démontrer que, quelle que soient les propositions p, g et r, on a :

$[\text{non } (p \text{ et } g \text{ et } r)] \Leftrightarrow [(\text{non } p) \text{ ou } (\text{non } g) \text{ ou} (\text{non } r)]$

$[\text{non } (p \text{ ou } g \text{ ou } r)] \Leftrightarrow [(\text{non } p) \text{ et } (\text{non } g) \text{ et} (\text{non } r)]$

Solution

1. Rappelons la loi de Morgan : quelles que soient les propositions p, g, on a :
$non(p\ et\ q) \Leftrightarrow (non\ p)\ ou\ (non\ q)$.

nous aurons alors $\left[non(p\ et\ q\ et\ r)\right] \Leftrightarrow non\left[(p\ et\ q) et\ r\right]$

$\Leftrightarrow non(p\ et\ q) ou\ (non\ r)$

$\Leftrightarrow (non\ p)\ ou\ (non\ q)\ ou\ (non\ r)$

De la même manière et en parant de la loi de Morgan:
Quelles que soient les propositions p et g, on a : $non(p\ ou\ q) \Leftrightarrow (non\ p)\ et (non\ q)$

nous aurons alors $\left[non(p\ ou\ q\ ou\ r)\right] \Leftrightarrow non\left[(p\ ou\ q) ou\ r\right]$

$\Leftrightarrow non(p\ ou\ q)\ et\ (non\ r)$

$\Leftrightarrow (non\ p)\ et\ (non\ q)\ et\ (non\ r)$

Exercices 4

Soient p et q et r trois propositions quelconques
1. Ecrire la proposition: $p \Rightarrow (q \Rightarrow (non\ r))$ (1) uniquement avec les connecteurs ou, non.
L'écrire uniquement avec les connecteurs et, non
2. Dans quels cas(1) est-elle fausse ? vraie ?

Solution

1. Par définition de l'implication, on peut écrire sous la forme:
$(non\ p) ou\ \left[(non\ q)\ ou (non\ r)\right]$

Puisque la disjonction est associative, on peut aussi récrire: $\left[(non\ p) ou\ (non\ q)\right] ou (non\ r)$

On l'écrit simplement: $(non\ p)\ ou\ (non\ g)\ ou\ (non\ r)$

D'après l'exercice précèdent, on peut aussi l'écrire $non(p\ et\ q\ et\ r)$

2. La proposition (1) est fausse si et seulement si $(p\ et\ q\ et\ r)$ est vraie, c'est-à-dire si et seulement si
les propositions p et q et r sont toutes trois vraies
La proposition (1) est vraie dans les autres cas, c'est-à-dire lorsque l 'une au moins des trois propositions p et q et r est fausse.

Exercices 5

Démontrer par récurrence que quel que soit l'entier naturel n : $n^3 + 2n$ est divisible par 3 .

Solution

La propriété est vraie pour n=0.
En effet, 0 est divisible par tous les entiers non nuls.
Supposons que la propriété est vraie pour $n \in \mathbb{N}$ et montrons qu'elle est vraie pour $(n+1)$.

C'est-à-dire montrons que si $n^3 + 2n$ est divisible par 3 alors $(n+1)^3 + 2(n+1)$ l'est aussi

En effet $(n+1)^3 + 2(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2$

$$= n^3 + 2n + 3\left(n^2 + n + 1\right)$$

Or d'après Hypothèse de récurrence $n^3 + 2n$ *est divisible par* 3, *et comme* $\left(n^2 + n + 1\right)$ *est un entier naturel,* $3\left(n^2 + n + 1\right)$ *est aussi divisible par* 3 ; *donc* $(n+1)^3 + 2(n+1)$ *est divisible par* 3

Donc pour tout entier naturel n, $n^3 + 2n$ *est divisible par* 3 .

Exercices 6

Montrer que Pour tout entier naturel non nul n, $n^2 - 1$ *est divisible par* 8 *si et seulement si n est impair.*

Solution

Nous procédons par double implication
Montrons d'abord, que si n est impair, alors, $n^2 - 1$ *est divisible par* 8.
En effet, si n est un entier naturel impair, alors il existe k appartenant à $\mathbb{N}$ *, tel que* $n = 2k + 1$ *, et on aura alors:*

$n^2 - 1 = (2k+1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k(k+1)$ *or comme le produit de deux entiers naturels consécutifs est pair, il existe un entier naturel m tel que* $k(k+1) = 2m$.

On aura donc $n^2 - 1 = 8m$ *avec m entier naturel. C'est-a-dire,* $n^2 - 1$ *est divisible par* 8.
Montrons maintenant l'implication inverse, c'est-à-dire si $n^2 - 1$ *est divisible par* 8 *alors n est impair*
Raisonnons par I 'absurde et supposons que $(n^2 - 1)$ *est divisible par* 8 *et que n est pair*
n pair signifie qu'il existe un entier naturel k tel que $n = 2k$ *iI en découle que*

$n^2 - 1 = (n-1)(n+1) = (2k-1)(2k+1)$ *) est un nombre impair, car produit des deux nombres impairs* $(2k-1)$ *et* $(2k+1)$. *Ceci est contradictoire avec Hypothèse que* $n^2 - 1$ *est divisible par 8 D'où n est impaire.*

Exercices 7

Démontrer par l'absurde que : $(\forall a \in \mathbb{Q})(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $a + \dfrac{1}{n\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$.

Solution

Soit $a \in \mathbb{Q}$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$ *: montrons par l'absurde que* $a + \dfrac{1}{n\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$

Pour ceci, supposons que $a + \dfrac{1}{n\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$

C'est-à-dire $a + \dfrac{\sqrt{2}}{2n} \in \mathbb{Q}$

Et puisque $a \in \mathbb{Q}$, *il en découle que* $\dfrac{\sqrt{2}}{2n}$

- Et en multipliant par rentier naturel $2n$ *, on- aboutit* $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. *Résultat qui contredit le fait que* $\sqrt{2}$ *est un nombre irrationnel D'où* $a + \dfrac{1}{n\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$

Exercices 8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, considérons $P(n) = n^2 + 7n + 12$.

Montrer qu'il n'existe pas de n tel que $\sqrt{P(n)} \in \mathbb{N}$.

Solution

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $n^2 + 6n + 9 < n^2 + 7n + 12 < n^2 + 8n + 16$,
D'où : $(n+3)^2 < P(n) < (n+4)^2$

Puisque $n+3 > 0$, on déduit que : $(n+3) < \sqrt{P(n)} < (n+4)$.

Donc $\sqrt{P(n)} \notin \mathbb{N}$, puisqu'il est strictement compris entre deux entiers naturels consécutifs.

Exercices 9

Soit $n \in \mathbb{N}^*$
Montrer qu'il n'existe pas d'entier naturel p vérifiant : $n^2 + 1 = p^2$.

Solution

Raisonnant par l'absurde et supposons que : $(\exists p \in \mathbb{N}) / n^2 + 1 = p^2$

$$
\begin{aligned}
(\exists p \in \mathbb{N}) / n^2 + 1 = p^2 &\Leftrightarrow (\exists p \in \mathbb{N}) / p^2 - n^2 = 1 \\
&\Leftrightarrow (\exists p \in \mathbb{N}) / (p-n)(p+n) = 1 \\
&\Leftrightarrow (\exists p \in \mathbb{N}) / (p-n) = (p+n) = 1
\end{aligned}
$$

(Car $(p-n) = (p+n) = -1$ est un possible puisque $(p+n) > 0$)

On a donc : $\begin{cases} p - n = 1 \\ p + n = 1 \end{cases} \Rightarrow 2n = 0 \Rightarrow n = 0$; ce qui est absurde car $n > 0$.