Exercice

I- On considère la fonction numérique g définie sur $]0;+\infty[$ *par:* $g(x)=2\ln(x)-1+x$.

1- a- Calculer $g'(x)$ *; pour tout* $x\in]0;+\infty[$.

b- Déduire la monotonie de g sur $]0;+\infty[$.

2- Calculer $g(1)$*, puis déduire que* $\forall x\in[1;+\infty[$; $g(x)\geq 0$ *et* $\forall x\in]0;1]$; $g(x)\leq 0$.

II- On considère la fonction numérique définie sur $x\in]0;+\infty[$ *par :* $f(x)=\ln^2(x)-\ln(x)+x$.

et soit (C) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1- Démontrer que: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$.

2- a- Démontrer que: $(\forall x\in]0;+\infty[)$; $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x}$

b- Déduire les variations de f.

3- Démontrer que (C) *admet et une branche parabolique de direction asymptotique la droite* (Δ) *d'équation* $y=x$.

4- a- Déterminer la position relative de la courbe (C) *et la droite* (Δ).

b- Construire (Δ) *et* (C).

Solution

I - 1- a- $(\forall x\in \mathbb{R}_+^*)$; $g'(x)=(2\ln(x)-1+x)'=\dfrac{2}{x}+1.$

b- Comme $x\in\mathbb{R}_+^*$ *alors* $g'(x)>0$

Par suite g est strictement croissantes $]0;+\infty[$.

2- On a: $g(1)=2\ln(1)-1+1=0$.

■ *Comme g est croissante sur l'intervalle* $]0;1]$ *alors* $\forall x\leq 1$; $g(x)\leq g(1)$ *d'où* $g(x)\leq 0$.

■ *Comme g est croissante sur l'intervalle* $[1;+\infty[$ *alors* $\forall x\geq 1$; $g(x)\geq g(1)$ *d'où* $g(x)\geq 0$.

II- 1-■ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left((\ln(x))^2-\ln(x)+x\right)=+\infty$ *(Car* $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln(x))^2=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to 0^+}(-\ln(x))=+\infty$*)*

■ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left((\ln(x))^2-\ln(x)+x\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln(x)\left(\ln(x)-1+\frac{x}{\ln(x)}\right)$$

$$=+\infty$$

(Car $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{\ln(x)}\right)=+\infty$*)*

2- $(\forall x\in]0;+\infty[)$; $f'(x)=\left((\ln(x))^2-\ln(x)+x\right)'$

$$=2\times\frac{1}{x}\times\ln(x)-\frac{1}{x}+1$$

$$=\frac{2\ln(x)-1+x}{x}$$
$$=\frac{g(x)}{x}$$

Donc $f'(x)$ *est du même signe que* $g(x)$.

- *Comme* $\forall x\leq 1\ ;\ g(x)\leq 0$.
- *Comme* $\forall x\geq 1\ ;\ g(x)\geq 0$.

Alors : - $\forall x\leq 1\ ;\ f'(x)\leq 0$.

- $\forall x\geq 1\ ;\ f'(x)\geq 0$.

Donc : f est décroissante sur l'intervalle $]0;1]$ *et croissante sur l'intervalle* $[1;+\infty[$

Tableau de variation de f:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

- $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(\ln(x))^2-\ln(x)+x}{x}\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(\ln(x))^2}{x}-\frac{\ln(x)}{x}+1\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\left(\ln\left(\sqrt{x}^2\right)\right)^2}{\sqrt{x}^2}-\frac{\ln(x)}{x}+1\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{2\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\right)^2-\frac{\ln(x)}{x}+1\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(4\left(\frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\right)^2-\frac{\ln(x)}{x}+1\right)$$
$$=1$$

(Car $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}=0$ *et* $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)=0$*)*

Donc (C) *admet une branche parabolique de direction la droite* (Δ) *d'équation* $y=x$ *au voisinage de* $+\infty$.

4- a- On a: $f(x)-x=\ln(x)(\ln(x)-1)$

D'où la position relative de (C) et la droite (Δ) est résumée dans le tableau suivant :

x	0		1		e		$+\infty$
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Position relative de (C) et la droite (Δ)		(C) **est Au-dessus de la droite** (Δ)	**Point d'inters-ection**	(C) **est Au-dessous de la droite** (Δ)	**Point d'inters-ection**	(C) **est Au- dessus de la droite** (Δ)	

b – Construction de (C) et la droite (Δ)