

EXERCICE 1

La courbe ci-contre est celle d'une fonction f vérifiant : f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$
Le point J est un centre de symétrie de C_f , la droite (AJ) est une asymptote à C_f au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$; la droite $T : y = (1-e)x + 1$ est tangente à C_f en J .

- 1) a) Montrer qu'il existe une fonction ϕ définie sur $\mathbb{R}$, admettant 0 pour limite en $+\infty$ et en $-\infty$ telle que $f(x) = x + 1 + \phi(x)$
- b) Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$ $f(x) + f(-x) = 2$
- c) en déduire que ϕ est impaire
- d) sachant que $\phi(x) = (ax+b)e^{-x^2}$, déterminer l'expression de $f(x)$
- 2) a) vérifier que $f'(x) = 1 + (2x^2 - 1)e^{-x^2+1}$
- b) Etudier le sens de variation de f' sur $[0; +\infty[$ et dresser son tableau de variations
- c) Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une seule solution α dans $[0; +\infty[$ et que : $0,51 \leq \alpha \leq 0,52$
- d) En déduire les variations de f
- e) Exprimer le minimum de f sur $[0; +\infty[$ sous la forme d'un quotient de deux polynômes en α .

EXERCICE 2:

Pour tout entier naturel n , on pose : $I_n = \int_0^\pi e^x \cos(nx) dx$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n , $\cos(n\pi) = (-1)^n$ et que $\sin(n\pi) = 0$
2. A l'aide de deux intégrations par parties, montrer que $I_n = \frac{(-1)^n e^\pi - 1}{1+n^2}$
3. Montrer que, pour tout entier naturel n , $|I_n| \leq \frac{e^\pi + 1}{1+n^2}$.

En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

EXERCICE 3

PARTIE I

Dans cette partie, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

On considère la fonction g_n définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $g_n(x) = nx + 2 \ln x$

- 1) Dresser le tableau de variation de g_n .
- 2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $\sqrt{x} > \ln x$.
- 3) a) Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}_+^*$ une unique solution notée α_n , puis montrer que

$$\frac{1}{n} < \alpha_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

- b) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$

PARTIE II

I. soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt[3]{x}e^{-x}$

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. On prend $\|\vec{i}\| = 3\text{cm}$

1) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

3) a) Montrer que pour tout réel $x \in [0, +\infty[$, on a : $f'(x) = \left(\frac{1-3x}{3x} \right) f(x)$

b) Dresser le tableau de variation de f .

4) tracer C_f . On prendra $f\left(\frac{1}{3}\right) \approx 0,5$

II. On pose $I = \left[\frac{1}{3}; 1 \right]$

1) a) Montrer que : $f(I) \subset I$.

b) A l'aide de la question 3) a) de la partie II, montrer que : $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$

c) Montrer que : $[x = \alpha_3 \Leftrightarrow (x > 0 \text{ et } f(x) = x)]$, où α_3 est la solution de l'équation $g_3(x) = 0$

2) Soit $(U_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par : $U_0 = \frac{1}{3}$ et pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = f(U_n)$

a) Montrer que pour tout entier naturel n , $U_n \in I$ □.

b) Montrer que pour tout entier naturel n , $|U_{n+1} - \alpha_3| \leq \frac{2}{3} |U_n - \alpha_3|$.

c) En déduire que pour tout entier naturel n , $|U_n - \alpha_3| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

d) Montrer que la suite $(U_n)_{n \geq 0}$ est convergente et donner sa limite.

PARTIE III.

Soit F la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$F(x) = \int_x^{8x} f(t) dt$$

1) a) Montrer que F est dérivable sur $[0, +\infty[$.

b) Donner l'expression de $F'(x)$ pour tout x appartenant à $[0, +\infty[$ et en déduire le sens de variation de F

2) a) Montrer que pour tout x appartenant à $[0, +\infty[$, on a : $0 \leq F(x) \leq 2f(x)(1 - e^{-7x})$.

b) En déduire la valeur de $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.

c) Dresser le tableau de variation de F .