guessmaths

Exercice 1:

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $f(0)=1$ et $f(x)=\frac{\ln(1+x)}{x}$; pour tout $x>0$, et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Montrer que f est continue à droite en 0.
2. a) Montrer que pour tout $x\in[0;+\infty[$ on a : $x-\frac{x^2}{2}\le\ln(1+x)\le x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$
   b) Etudier la dérivabilité de f en $x_0=0$, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
3. Soit h la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $h(x)=\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)$
   a) Etudier le sens de variation de h, puis en déduire le signe de h sur $[0;+\infty[$
   b) Montrer que : $(\forall x\in]0;+\infty[);\ f'(x)=\frac{h(x)}{x^2}$
   c) Dresser le tableau de variations de f.
4. Représenter (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.
5. a) Montrer que f est une bijection de $[0;+\infty[$ vers un intervalle J à déterminer
   b) Montrer que f^{-1} est dérivable en 1 et calculer $(f^{-1})'(1)$
   c) Représenter $(C_{f^{-1}})$ dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Exercice 2:

I. Soit $n\in\mathbb{N}^*$

On considère la fonction h_n définie sur $]-1;+\infty[$ par : $h_n(x)=n\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}$

1. Etudier les variations de h_n.
2. En utilisant la valeur de $h_n(0)$, déterminer le signe de $h_n(x)$ sur l'intervalle $]-1;+\infty[$

II. A tout entier naturel n non nul, on associe la fonction f_n définie sur $]-1;+\infty[$ par : $f_n(x)=x^n\ln(1+x)$; et soit (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1. Etudier les branches infinies de (C_n).
2. a) Pour tout $x\in]-1;+\infty[$, vérifier que : $f_1'(x)=h_1(x)$ et que $\forall n>1$; $f_n'(x)=x^{n-1}h_n(x)$
   b) Dresser le tableau de variations de f_n.

3. Etudier la position relative de (C_{n+1}) et (C_n).

4. Représenter (C_1) et (C_2) dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Exercice 3

I. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x)=2x^3-1+2\ln|x|$

1. Calculer $\lim_{x\to-\infty} g(x)$, $\lim_{x\to0} g(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

2. a) Calculer $g'(x)$, pour tout $x\in\mathbb{R}^*$.

   b) Dresser le tableau de variations de g.

3. Montres que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution $\alpha\in\left]\frac{1}{2};1\right[$.

4. Etudier le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}^*$.

II. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=2x-\dfrac{\ln|x|}{x^2}$

Soit (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Calculer $\lim_{x\to0} f(x)$, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

2. a) Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

   b) Etudier les branches infinies de (C_f)

   c) Etudier la position relative de (C_f) et la droite (D) d'équation $y=2x$.

3.a) Calculer $f'(x)$, pour tout $x\in\mathbb{R}^*$.

   b) Dresser le tableau de variations de f

   c) Montrer que : $f(\alpha)=3\alpha-\dfrac{1}{2\alpha^2}$

   d) Représenter (C_f) (on prend $\alpha\simeq0{,}85$)

III. Soit m un réel supérieur à 1.

1. Montrer que la fonction H définie sur $[1;+\infty[$ Par : $H:x\mapsto-\dfrac{1+\ln x}{x}$ est une primitive de la fonction h définie sur $[1;+\infty[$ Par : $h:x\mapsto\dfrac{\ln x}{x^2}$

2. a) On désigne par $A(m)$ l'intégrale : $\int_1^m|f(x)-2x|dx$. Calculer $A(m)$

   b) Déterminer $\lim_{m\to+\infty} A(m)$.

Exercice 4 – Session de Rattrapage 2018

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $f(0)=0$ et $f(x)=\sqrt{x}(\ln x)^2$; si $x>0$.
(C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (Unité 2m)

1. a) Montrer que f est continue à droite de 0.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu

2. a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0, puis interpréter géométriquement le résultat Obtenu.

b) Montrer que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et calculer $f'(x)$, pour tout $x\in]0;+\infty[$.

c) Etudier les variations de f sur $]0;+\infty[$,en déduire que : $(\forall x\in]0;1]) ; 0\leq \sqrt{x}(\ln x)^2 \leq \left(\frac{4}{e}\right)^2$.

d) Représenter la courbe (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

3. Pour tout $x\geq 0$, on pose : $F(x)=\int_x^1 f(t)dt$.

a) Montrer que F est dérivable sur $[0;+\infty[$.

b) Calculer $F'(x)$ pour tout $x\geq 0$; en déduire les variations de F sur $[0;+\infty[$.

4. a) En utilisant une intégration par parties, calculer : $I(x)=\int_x^1 \sqrt{t}\ln t\, dt$, pour tout $x\geq 0$.

b) Montrer que : $\forall x>0$; $F(x)=-\frac{2}{3}x\sqrt{x}(\ln x)^2+\frac{8}{9}x\sqrt{x}\ln x-\frac{16}{27}x\sqrt{x}+\frac{16}{27}$

c) En déduire, en cm^2, l'aire du domaine délimité par (C_f) et les droites d'équations $x=0$, $x=1$ et $y=0$.

5. Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $u_n=\int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)dx$

a) Montrer que la suite (u_n) est bornée et strictement croissante. .

b) Montrer que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 5 –Session Normale 2018

I. a) Montrer que : $\forall x>0$; $\int_0^x \frac{t}{1+t}dt = x-\ln(1+x)$

b) On pose : $u^2=t$; montrer que : $\forall x>0$; $\int_0^x \frac{t}{1+t}dt=\frac{1}{2}\left(\int_0^{x^2}\frac{t}{1+\sqrt{u}}du\right)$

c) En déduire que : $\forall x\in]0;+\infty[$; $\frac{1}{2(1+x)}\leq\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\leq\frac{1}{2}$

d) Déterminer $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$.

II. Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=\frac{x+1}{x}\ln(1+x) \ ; si\ x\neq 0 \\ f(0)=1 \end{cases}$

1. Montrer que f est continue à droite en 0.
2. Montrer que f est dérivable à droite en 0 (utiliser le résultat de la question(I– 1.d))
3. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$; puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

4. a) Montrer que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que : $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $f'(x) = \dfrac{x - \ln(1+x)}{x^2}$ b)

En déduire que f est strictement croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$

c) Vérifier que: $f([0;+\infty[) = [1;+\infty[$

5. Représenter (C_f).

III. 1. Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = f(x) - x$

a) Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $0 \leq f'(x) \leq \dfrac{1}{x^2}$

b) En déduire que g est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$, puis montrer que:
$g(]0;+\infty[) =]-\infty;1[$

c) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0;+\infty[$

2. Soit $a \in]0;+\infty[$

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout $n \in \mathrm{IN}$.

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathrm{IN})$; $u_n > 0$

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathrm{IN})$; $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$

c) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathrm{IN})$; $|u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$

d) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$

Exercice 6

Sait f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2 - \ln^2 x}}$

Et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1. a) Déterminer D_f le domaine de définition de f

b) Calculer les limites de f aux bornes de D_f

c) Etudier les branches infinies de (C_f).

2. a) Calculer $f'(x)$, pour tout $x \in D_f$

b) Dresser le tableau de variations de f.

3. Donner une équation cartésienne de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse e.

4. Représenter (C_f) dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (On prend $\|\vec{i}\| = 2cm$)

5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) < x$

II- Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout $n \in \mathrm{IN}$.

1. Montrer que (u_n) est constante deux pour valeurs du terme Me à déterminer

2. On prend: $u_0 \in \left]\frac{1}{e};e\right[$

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\,;\ \frac{1}{e} \leq u_n \leq e$

b) Montrer que (u_n) est décroissante

c) En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 7– Rattrapage 2016–

n est un entier naturel non nul.

On considère la fonction f_n définie sus l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f_n(x) = \ln(x) - \frac{n}{x}$

Et (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. a) Étudier les deux branches infinies de (C_n)

   b) Etudier les variations de f_n sur $]0;+\infty[$, puis dresser son tableau de variations.

   c) Représenter (C_n) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

2. Montrer que la fonction f_n est une bijection de $]0;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$.

3. a) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, il existe un réel unique $\alpha_n \in]0;+\infty[$ tel que : $f_n(0) = 0$

   b) Comparer $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$ pour tout $x \in]0;+\infty[$

   c) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$, est croissante.

4. a) Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[)\,;\ \ln x < x$

   b) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = +\infty$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $I_n = \frac{1}{\alpha_{n+1} - \alpha_n}\int_{\alpha_n}^{\alpha_{n+1}} f_n(t)\,dt$

   a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,(\exists c_n \in [\alpha_n;\alpha_{n+1}])\,;\ I_n = f_n(c_n)$

   b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,;\ 0 \leq I_n \leq \frac{1}{\alpha_{n+1}}$

   c) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} I_n$

Exercice 8 – Session ordinaire 2015,

I. Soit f la fonction définie su $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x(1+\ln x)^2 & ;\ si\ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

Et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.
2. Montrer que f est continue à droite en $x_0 = 0$.
3. Calculer $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x}$, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

4. Calculer $f'(x)$ pour tout $x>0$, en déduire que f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

5. a) Montrer que la courbe (C_f) admet un point d'inflexion I d'abscisse e^{-1}?

b) Etudier la position relative de la courbe (C_f) et la droite d'équation $y=x$

6. Représenter (C_f) (on prend $e^{-1}\simeq 0,4$)

II. Soit la suite (u_n) définie par : $u_0=e^{-1}$ et $u_{n+1}=f(u_n)$; pour tout $n\in \mathbb{N}$

1. Montrer que : $(\forall n\in \mathbb{N})$; $e^{-1}\leq u_n\leq 1$

2. Montrer que la suite (u_n) est croissante, en déduire qu'elle est convergente

3. On pose $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=l$

a) Montrer que : $e^{-1}\leq l\leq 1$

b) Déterminer la valeur de l.

III. Soit la fonction F définie sur $[0;+\infty[$ par : $F(x)=\int_1^x f(t)\,dt$.

1. a) Montrer que la fonction $H:x\mapsto -\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x^2\ln x$ est une primitive de la fonction h définie Par : $h:x\mapsto \frac{\ln x}{x^2}$ sur $]0;+\infty[$.

b) Montrer que : $(\forall x>0)$; $\int_1^x t\ln^2(t)\,dt=\frac{x^2}{2}\ln^2(x)-\int_1^x t\ln(t)\,dt$

c) En déduire que pour tout $x>0$; on : $F(x)=-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{2}x^2\ln(x)+\frac{1}{2}x^2\ln^2(x)$

2. a) Montrer que F est continue sur $[0;+\infty[$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)$, en déduire $\int_0^1 f(x)\,dx$

Exercice 9

Soit f la fonction définie par : $f(x)=x\ln\left(\sqrt{x}-1\right)^2$

(C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1. Déterminer D_f le domaine de définition de f; puis calculer les limiter de f aux bornes de D_f

2. Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.

3. a) Calculer $f'(x)$, pour tout $x\in D_f$

b) Etudier le signe de $f'(x)$ sur $]0;1[$.

4. Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=\ln x^2+\frac{1}{x}+1$

a) Dresser le tableau de variations de g.

b) Déterminer le signe de $g(x)$

c) Montrer que : $(\forall x>1)$; $f'(x)=g\left(\sqrt{x}-1\right)$

d) Dresser le tableau de variations de f

5. Montrer que (C_f) admet un point d'inflexion d'abscisse supérieur strictement à 1.

6. a) Étudier les branches infinies de (C_f).

b) Donner une équation cartésienne de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse $x_0 = 4$.

7. Représenter (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

Exercice 10 -Rattrapage-2014

I. Soit f la fonction définie sur]0;+00[par : $f(x) = -\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

(C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (Unité 1cm)

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$, puis interpréter géométriquement les deux résultats obtenus.

2.Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0;+\infty[$, en déduire les variations de la fonction f sur $]0;+\infty[$

3. Pour tout $n \in \mathrm{IN}^*$, on considère la fonction g_n définie sur $]0;1[$ par : $g_n(x) = f(x) - x^n$

a) Montrer que En est strictement décroissante sur l'intervalle $]0;1[$

b) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, il existe $\alpha_n \in]0;1[$ unique, tel que : $f(\alpha_n) = \alpha_n{}^n$

c) Montrer que : $(\forall n \in \mathrm{IN}^*) ; g_n(\alpha_{n+1}) < 0$

d) Montrer que la suite (α_n) est croissante, puis en déduire qu'elle est convergente.

4. On pose $\lim\limits_{n\to +\infty} \alpha_n = l$

a) Vérifier que : $0 < \alpha_1 \leq l \leq 1$

b) Vérifier que : $(\forall n \in \mathrm{IN}^*)$; $h(\alpha_n) = n\alpha_n{}^n$ (avec $h(x) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\ln(-\ln x)}{\ln x}$

c) Montre que $l = 1$

d) En déduire que $\lim\limits_{n\to +\infty} (\alpha_n)^n = 0$

II. 1. a) Etudier le signe de l'intégrale $\int_x^1 f(t)\, dt$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.

b) En utilisant une intégration pas parties que :$(\forall x > 0)$; $\int_x^1 f(t)\, dt = 4 - 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x}\ln x$

c) En déduire, en cm^2 l'aire du domaine délimité par la courbe (C_f) et les droites d'équations $x = 1$; $x = e^2$ et $y = 0$.

2. On pose : $u_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$; pour tout $n \in \mathrm{IN}$

a) Montrer que pour tous entiers naturels n et k tels que : $n \geq 2$ et $1 \leq k \leq n-1$; on a :

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathrm{IN}^*$; on a : $\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt \leq u_n \leq \dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt$

c) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$

Exercice 11 -Ordinaire 2014.

I. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par: $\begin{cases} f(x) = \dfrac{-x\ln x}{1+x^2} & ;\ si\ x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

1. Montrer que f est continue sur $[0;+\infty[$

2.Étudier le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$

3. a) Montrer que : $(\forall x>0)\,;\, f\left(\dfrac{1}{x}\right) = -f(x)$

b) Montrer que f est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

4. a) Montrer que : $(\exists c\in]0;1[)\,;\ f'(c)=0$

b) En déduire que : $(\exists c\in]0;1[)\,;\ f'\left(\dfrac{1}{c}\right)=0$

II. Soit F la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $F(x)=\int_0^x f(t)dt$

et (C_F) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1. Vérifier que : $(\forall x\geq 0)\,;\ \dfrac{1}{2}\leq \dfrac{x^2}{1+x^2}\leq 1$

2. Montrer que : $(\forall x\geq 0)\,;\ F(1)-\dfrac{1}{2}\ln^2 x\leq F(x)\leq F(1)-\dfrac{1}{4}\ln^2 x$

3. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}$, puis interpréter géométriquement les résultats obtenus

4. a) Montrer que F est dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$, puis calculer $F'(x)$.

b) Etudier les variations de F sur $[0;+\infty[$.

5. a) Vérifier que : $(\forall t\in]0;+\infty[)\,;\ -t\ln t\leq e$

b) Montrer que : $(\forall t\in [0;+\infty[)\,;\ f(t)\leq \dfrac{1}{e}$

c) Vérifier que : $(\forall x\in]0;+\infty[)\,;\ F(x)<x$

III. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0\in]0;1[$ et $u_{n+1}=F(u_n)$, pour tout $n\in \mathrm{IN}$.

a) Montrer que : $(\forall n\in\mathrm{IN})\,;\ u_n\in]0;1[$.

b) Montrer que (u_n) est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice12 – Rattrapage 2013

I. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}} & ; si\ x>0 \\ f(0)=1 \end{cases}$

et (C_F) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

a) Montrer que la fonction f est continue à droite en 0, puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0

c) Montrer que f est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et que : $(\forall x>0)$; $f'(x)=\dfrac{-x\ln x.(1+\ln x)}{\left(1+(x\ln x)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

d) Dresser le tableau de variations de f

II. Soit F la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $F(x)=\int_0^x f(t)dt$

Et (C_F) sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1. Déterminer une primitive de la fonction $x\mapsto \dfrac{1}{x\ln x}$ sur l'intervalle $[e;+\infty[$.

2. Montrer que : $(\forall t\geq e);t\ln t<\sqrt{1+(t\ln t)^2}<\sqrt{2}(t\ln t)$

3. Montrer que pour tout $t\geq e$; $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln(\ln x)<\int_e^x \dfrac{dt}{\sqrt{1+(t\ln t)^2}}<\ln(\ln x)$

4. En déduire que : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{F(x)}{x}=0$.

5. Montrer que (C_F) admet deux points d'inflexion dont on déterminera les abscisses

6. Représenter (C_F) (On prendra $F(1)\simeq 0,5$ et $F\left(\dfrac{1}{4}\right)\simeq 0,4$) .

III. Pour tout $x\in[0;+\infty[$, on pose : $\varphi(x)=x-F(x)$

1. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)=+\infty$, puis étudier les variations de φ.

2. Montrer que pour tout entier $n\in\mathrm{IN}$,l'équation $\varphi(x)=n$ admet une unique solution $\alpha_n\in[0;+\infty[$

3. Montrer que : $(\forall n\in\mathrm{IN})$; $\alpha_n\geq n$, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$

4. a) Montrer que : $(\forall n\in\mathrm{IN}^*)$; $0<\dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n}<\dfrac{F(n)}{n}+f(n)$

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\alpha_n}{n}$

Exercice13 – Normale 2013

I. Soit h la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par: $\begin{cases} h(x)=\dfrac{x-1}{x\ln x} & ; si\ x>1 \\ h(1)=1 \end{cases}$

1. a) Montrer que f est continue à droite en $x_0=1$.

b) Montrer que : $(\forall x>1);\ \ln x<x-1$

c) En déduire la monotonie de h sur $]1;+\infty[$.

2. a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$, puis dresser le tableau de variations de h.

b) En déduire que : $(\forall x\geq 1);\ 0<h(x)\leq 1$

II. Soit g la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par : $\begin{cases} g(x)=\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{dt}{\sqrt{t}\ln t} & ; si\ x>1 \\ g(1)=\ln 2 \end{cases}$

Et (C_g) sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1. a) Vérifier que: $(\forall t>1);\ \displaystyle\int_x^{x^2}\frac{dt}{t\ln t}=\ln 2$

b) Montrer que : $(\forall t>1)\ ;\ g(x)-\ln 2=\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{\sqrt{t}-1}{t\ln t}dt$

c) Montrer que : $(\forall t>1)\ ;\ g(x)-\ln 2=\displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{t-1}{t\ln t}dt$

2. a) Montrer que pour tout $t>1$; on a : $(t-\sqrt{t})h(t)\leq g(t)-\ln 2\leq(t-\sqrt{t})h(\sqrt{t})$

b) En déduire que la fonction est dérivable à droite en $x_0=1$.

c) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=0$

3. a) Montrer que g est dérivable sur $]1;+\infty[$ et que : $(\forall x\in]1;+\infty[);\ g'(x)=\dfrac{1}{2}h(\sqrt{x})$

b) En déduire que : $(\forall x\in]1;+\infty[);0<g'(x)\leq\dfrac{1}{2}$;puis dresser le tableau de variations de g.

c) Représenter (C_g).

III. 1. Montrer que la fonction $k:x\mapsto g(x)-x+1$ est une bijection de $[1;+\infty[$ vers $]-\infty;\ln 2]$.

2. En déduire qu'il existe un réel unique $\alpha\in]1;+\infty[$ tel que : $1+g(\alpha)=\alpha$

3. Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par : $1\leq u_0<\alpha$ et $u_{n+1}=1+g(u_n)$, pour tout $n\in IN$.

a) Montrer que : $(\forall n\in IN);\ 1\leq u_n<\alpha$

b) Montrer que $(U_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante.

c) Montrer que $(U_n)_{n\geq 0}$ est convergente et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\alpha$

d) Montrer que : $(\forall n\in IN);\ |u_{n+1}-\alpha|\leq\dfrac{1}{2}|u_n-\alpha|$

e) Montrer que : $(\forall n\in IN)$; $|u_n-\alpha|\le\left(\frac{1}{2}\right)^n|u_0-\alpha|$

f) En déduire une deuxième fois que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\alpha$

Exercice14 – Rattrapage 2011

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=x+\ln x$

(C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (l'unité 1cm)

1. Calculer $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$

2. a) Dresser le tableau de variations de f.

 b) Montrer que la fonction f est une bijection de l'intervalle $]0;+\infty[$ vers un intervalle J à déterminer ;puis dresser le tableau de variations de la fonction f^{-1}

3. Calculer $f(1)$ et $f(e)$, puis construire les deux courbes (C_f) et $(C_{f^{-1}})$

4. a) Montrer que : $\int_1^{e+1}f^{-1}(x)\,dx=1$ (Poser $t=f^{-1}(x)$)

 b) En déduire l'aire du domaine délimité par (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x=1$, $x=e+1$ et $y=x$.

5. On considère l'équation $(E_n): x+\ln x=n$ avec $n\in IN^*$.

 a) Montrer que l'équation (E_n) admet une solution unique x_n

 b) Déterminer la valeur de x_1, puis démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=+\infty$.

6. a) Montrer que : $(\forall n\in IN^*)$; $f(x_n)\le f(n)$, puis en déduire que :$(\forall n\in IN^*)$; $x_n\le n$

 b) Montrer que : $(\forall n\in IN^*)$; $n-\ln(n)\le x_n$

 c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{x_n-n}{n}\right)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{x_n}{n-\ln(n)}\right)$

Exercice15 – Rattrapage 2010

I. Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{1-\ln(1-x)} & ;\ si\ 0\le x<1 \\ f(1)=0 \end{cases}$

(C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (Unité : 2 cm)

1. Montrer que f est continue à gauche en 0.

2. Etudier la dérivabilité de f à gauche en 0.

3. Etudier les variations de f sur l'intervalle $[0;1]$, puis dresser le tableau de variations de f.

 a) Montrer que la courbe (C_f) admet un point d'inflexion unique d'abscisse $\frac{e-1}{e}$

 b) Représenter (C_f)

4. Montrer qu'il existe un réel unique α dans intervalle $I=[0;1]$ vérifiant : $f(\alpha)=\alpha$

5. a) Montrer que f est une bijection de I vers I.

b) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in I$.

I. 1. On pose : $\begin{cases} I_0=\int_0^1 f(t)dt \\ I_n=\int_0^1 t^n f(t)dt \quad (\forall n\in \mathbb{N}) \end{cases}$.

a) Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et qu'elle est convergente

b) Montrer que : $(\forall n\in \mathbb{N})$; $0\leq I_n\leq \dfrac{1}{n+1}$; puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

2. Pour tout réel x de l'intervalle $I=[0;1]$ et pour tout $n\in \mathbb{N}^*$, on pose : $F_0(x)=\int_0^x f(t)dt$ et

$$F_n(x)=\int_0^x t^n f(t)dt \ ; \ F(x)=\int_0^x \frac{f(t)}{1-t}dt \ \text{ et } \ S_n=\sum_{k=0}^{n} F_k(x)$$

a) Montrer que :$(\forall n\in \mathbb{N})(\forall x\in I)$; $F(x)-S_n(x)=\int_0^x \dfrac{t^{n+1}f(t)}{1-t}dt$

b) Montrer que la fonction : $x\mapsto (1-x)(1-\ln(1-x))$ est strictement décroissante sur I.

c) En déduire que la fonction :$t\mapsto \dfrac{f(t)}{1-t}$ strictement croissante sur $[0;x]$, pour tout $x\in I$.

3. a) Montrer que : $(\forall n\in \mathbb{N})(\forall x\in I)$; $0\leq F(x)-S_n(x)\leq \dfrac{1}{n+2}.\dfrac{1}{1-x}$

b) En déduire que : $(\forall x\in I)$; $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x)=F(x)$.

4. a) Déterminer $F(x)$ pour tout $x\in I$.

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to 1^-} F(x)$

Exercice16 – Normale 2016

n est un entier naturel non nul

Soit f_n la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f_n(x)=x(1-\ln x)^n \quad si\ x>0 \\ f_n(0)=0 \end{cases}$

Partie I:

(C_n) est la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité 2 cm)

1. a) Montrer que f_n est continue à droite en $x_0=0$.

b) Etudier la dérivabilité de f_n à droite en $x_0=0$.

c) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_1(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_2(x)}{x}$

2. a) Etudier les variations de f_1,

b) Etudier les variations de f_2.

3. a) Etudier la position relative de (C_1) et (C_2).

b) Construire (C_1) et (C_2).

Partie II:

Soit F la fonction définie sur $]-\infty;0]$ par : $F(x)=\int_{e^x}^{1}\frac{f_1(t)}{1+t^2}dt$

1. a) Montrer que F est dérivable sur $]-\infty;0[$ et que : $(\forall x\in]-\infty;0[)$; $F'(x)=\frac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}}$

   b) En déduire le sens de variation de F sur $]-\infty;0[$.

2. a) Montrer que : $(\forall x<0)$; $\frac{1}{2}\int_{e^x}^{1}f_1(t)dt\leq F(x)\leq\frac{1}{1+e^{2x}}\int_{e^x}^{1}f_1(t)dt$

   b) Montrer que la fonction : $x\mapsto x^2\left(\frac{3}{4}-\frac{\ln x}{2}\right)$ une primitive de f_1 sur $]0;+\infty[$.

   c) Montrer que : $\lim_{x\to-\infty}\int_{e^x}^{1}f_1(t)dt=\frac{3}{4}$

3. On suppose que F admet une limite finie l quand x tend vers $-\infty$.

   Montrer que les : $\frac{3}{8}\leq l\leq\frac{3}{4}$

Partie III

Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $u_n=\int_1^e f_n(x)dx$

1. a) Montrer que : $(\forall n\geq1)$; $u_n\geq0$.

   b) Etudier le signe de $f_{n+1}(x)-f_n(x)$ sur $[1;e]$.

   c) Montrer que : $(\forall n\geq1)$; $u_{n+1}\leq u_n$.

   d) En déduire que la suite (u_n) est convergentedr9

2. a) Montrer que : $(\forall n\geq1)$; $u_{n+1}=-\frac{1}{2}+\frac{n+1}{2}u_n$.

   b) En déduire en cm^2 l'aire du domaine délimité par les courbes (C_1) et (C_2) et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

3. a Montrer que : $(\forall n\geq2)$; $\frac{1}{n+1}\leq u_n\leq\frac{1}{n-1}$ (utiliser les questions précédentes)

   b) Calculer $\lim_{n\to+\infty}u_n$ et $\lim_{n\to+\infty}n.u_n$

4. a est un nombre réel diffèrent de u_1.

Soit (v_n) la suite définie par : $v_1=a$ et $v_{n+1}=-\frac{1}{2}+\frac{n+1}{2}v_n$, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

Et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose: $d_n=|v_n-u_n|$

   a) Montrer que: $(\forall n\geq1)$; $d_n=\frac{n!}{2^{n-2}}d_1$

   b) Montrer que : $\lim_{n\to+\infty}d_n=+\infty$

c) En déduire que (v_n) est divergente.

Exercice 17– Rattrapage 2008

I. Soit tu la fonction définie sur $I = \left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln(1+2x)}{x} & ; \; si \; x \neq 0 \\ f(0)=2 \end{cases}$ (G) est la (C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Montrer que f est continue en $x_0=0$.

2. Pour tout réel non nul a de l'intervalle I, on considère la fonction h_a définie sur I par : $h_a(x)=(\ln(1+2a)-2a)x^2-(\ln(1+2x)-2x)a^2$.

a) Calculer $h_a(a)$ et $h_a(0)$, en déduire qu'il existe un réel b compris entre 0 et a tel que : $\dfrac{\ln(1+2a)-2a}{a^2}=\dfrac{-2}{1+2b}$

b) En déduire que la fonction f est dérivable en $x_0=0$ et que $f'(0)=-2$.

4. Montrer que f est dérivable sur $I\setminus\{0\}$ et que : $(\forall x\in I\setminus\{0\})$, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2(1+2x)}$: avec $g(x)=2x-(1+2x)\ln(1+2x)$.

5. a) Montrer que : $(\forall x\in I\setminus\{0\})$; $g(x)<0$.

b) En déduire les variations de f.

c) Calculer $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; puis interpréter géométriquement les résultats obtenus

6. Montrer qu'il existe un réel α unique dans $[1;2]$ tel que : $f(\alpha)=1$.

7. Représenter (C_f) (On prend $\alpha\simeq 1{,}3$)

8. On pose $J=[1;\alpha]$ et 4(x)= ln1] et $\varphi(x)=\ln(1+2x)$, pour tout $x\in I$.

a) Montrer que φ est dérivable sur I et que : $(\forall x\in I)$; $0<\varphi'(x)<\dfrac{2}{3}$

b) Vérifier que : $\varphi(\alpha)=\alpha$ et que : $\varphi(J)\subset J$

II. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par : $u_0=1$ et $u_{n+1}=\ln(1+2u_n)$, pour tout $n\in$ IN.

1. Montrer que : $(\forall n\in \text{IN})$; $u_n\in J$

2. Montrer que : $(\forall n\in \text{IN})$; $|u_{n+1}-\alpha|\leq\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

3. Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

III. Soit Fla fonction définie su I par : $F(x)=\int_0^x f(t)dt$

1. a) Montrer que Faut dérivable sur I, puis calculer $F'(x)$.

b) En déduire le sens de variation de F sur I.

2\. a) Montrer que : $(\forall x \geq 1);\ F(x) \geq \int_1^x \frac{\ln(1+2t)}{1+2t}\,dt$

b) En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$.

3\. On suppose que F admet une limite finie l à droite de $-\frac{1}{2}$.

4\. Soit F la fonction définie $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$ par : $\begin{cases} F(x) = F(x) & ;\ si\ x \in I \\ F\left(-\frac{1}{2}\right) = l \end{cases}$

a) En utilisant TAF, montrer que : $(\forall x \in I);\ F(x) - l \geq f(x)\left(x + \frac{1}{2}\right)$

b) En déduire que F est dérivable à droite en $-\frac{1}{2}$.

Exercice 18– Rattrapage 2019

I\. Soit g la fonction définie sur $I =]-1;+\infty[$ par : $g(x) = 1 + x^2 - 2x(1+x)\ln(1+x)$

1\. a) Montrer que : $\lim\limits_{x \to -1^+} g(x) = 2$

b) Montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

2\. a) Montrer que g est dérivable sur I et que : $(\forall x \in I);\ g'(x) = -2(1+2x)\ln(1+x)$

b) Le tableau de variations de g :

x	-1		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$g'(x)$			0		0		
$g(x)$	2	$\searrow$	$\frac{5}{4} - \frac{\ln 2}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

3\. a) Montrer qu'il existe un nombre réel unique α strictement positif tel que : $g(\alpha) = 0$

b) Vérifier que : $\alpha < 1$ (On prend $\ln 2 \simeq 0,7$).

c)En déduire que : $\forall x]-1;\alpha[;\ g(x) > 0$

$\forall x]\alpha;+\infty[;\ g(x) < 0$

II. Soit f la fonction définie sur $I =]-1;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1\. a) Calculer $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2. a) Montrer que f est dérivable sur I et que : $(\forall x \in I)$; $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(1+x)(1+x^2)}$

b) Dresser le tableau de variations de f

c) Vérifier que : $f(\alpha)=\dfrac{1}{2\alpha(1+\alpha)}$ et que : $(\forall x \in I)$; $f(x)\leq\dfrac{1}{2\alpha(1+\alpha)}$

3. a) Donner une équation cartésienne de la tangente (T) à (C_f) point d'abscisse 0.

b) Montrer que : $(\forall x>0)$; $\ln(1+x)<x$.

c) En déduire que: $\forall x\in]0;+\infty[$; $f(x)<x$.

d) Représenter (C_f). (On prend $\|\vec{i}\|=2cm$ et $\alpha\simeq 0{,}8$

III. On pose : $J=\int_0^1 f(x)dx$

1. a) En utilisant le changement de variable $t=\dfrac{1-x}{1+x}$, montrer que : $J=\dfrac{\pi}{8}\ln 2$.

b) Calculer, en cm^2, l'aire du domaine délimité par (C_f) ; (T) et les droites $x=0$ et $x=1$.

2. En utilisant l'intégration par parties, calculer l'intégrale : $K=\int_0^1 \dfrac{\text{Arctan}x}{1+x}dx$.

Exercice 19– Normale 2019

I. Soit f la fonction définie sur $I=[0;+\infty[$ par: $\begin{cases} f(x)=x^3\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) & ;\ si\ x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (On prend $\|\vec{i}\|=1cm$)

1. En utilisant le théorème des accroissement Finis dans l'intervalle $[x;x+1]$ à la fonction $t\mapsto\ln(t)$, montrer que : $\forall x\in]0;+\infty[$; $\dfrac{1}{1+x}<\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)<\dfrac{1}{x}$ $\quad (P)$

2. a) En utilisant la proposition (P), montrer que f est dérivable à droite en 0 .

b) En utilisant la proposition (P), montrer que (C_f) admet une branche parabolique de direction à déterminer.

3. a) Montrer que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que : $(\forall x>0)$;

$$f'(x)=3x^2\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{3(1+x)}\right)$$

b) En déduire que f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ (utiliser la proposition (P))

c) Dresser le tableau de variations de f.

4. On pose : $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$; pour tout $x>0$.

a) Vérifier que pour tout $x>0$, on a : $g'(x)=2x\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{2(1+x)}\right)$

Puis en déduire que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

b) Montrer que l'équation $g(x)=1$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}_+^*$ et que : $\alpha\in]1;2[$

(On donne : $\ln 2\simeq 0,7$ et $\ln\frac{3}{2}\simeq 0,4$)

c) En déduire que les seules solutions de l'équation $f(x)=x$ sont 0 et α.

5. a) Représenter (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

b) Montrer que la fonction f est une bijection de I dans I.

(On désigne par f^{-1} sa bijection réciproque)

II. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} 0<u_0<\alpha \\ u_{n+1}=f^{-1}(u_n) \qquad (\forall n\in\mathbb{N}) \end{cases}$.

1. Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $0<u_n<\alpha$

2. a) Montrer que : $g(]0;+\infty[)=]0;1[$

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

c) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente

3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

III. Soit Fla fonction définie sur $I=[0;+\infty[$ par : $F(x)=\int_x^1 f(t)dt$

1. a) Etudier le signe de $F(x)$ suivant les valeurs de x.

b) Montrer que F est dérivable sur I, puis calculer $F'(x)$ pour tout $x\in I$.

c) En déduire que F est strictement décroissante sur I.

2. a) Montrer que : $\forall x\in[1;+\infty[; F(x)\leq(1-x)\ln 2$:

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

3. a) En utilisant l'intégration par parties, montrer que pour tout $x\in]0;+\infty[$;

$$F(x)=\frac{\ln 2}{4}-\frac{x^2}{4}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{4}\int_x^1\frac{t^3}{t+1}dt$$

b) Calculer : $\int_x^1\frac{t^3}{t+1}dt$ (Remarquer que cette $\frac{t^3}{t+1}=t^2-t+1-\frac{1}{t+1}$).

c) En déduire que pour tout $x\in]0;+\infty[$, on a :

$$F(x)=\frac{5}{24}-\frac{x^3}{13}+\frac{x^2}{8}-\frac{x}{4}+\frac{1}{4}\ln(1+x)-\frac{x^4}{4}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

d) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} F(x)$, puis en déduire la valeur de $\int_0^1 f(t)dt$

IV. Pour tout entier naturel non nul n on pose : $v_n=\sum_{k=0}^{n-1}\left(F\left(\frac{2k+1}{2n}\right)-F\left(\frac{k}{n}\right)\right)$

1. Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0;1;\cdots;n-1\}$ on a :

$$-\frac{1}{2n} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \leq F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) \leq -\frac{1}{2n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq v_n \leq -\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$

(Remarquer que: $\frac{2k+1}{2n} < \frac{k+1}{n}$)

3. Montrer que $(u_n)_{n\in \mathbb{N}}$ est convergente, puis calculer sa limite.

Exercice 20– Rattrapage 2020

Première partie

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I=[0;1]$ par : $f(x)=x\ln(2-x)$.

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. a) Montrer que f est dérivable sur I et que : $(\forall x \in I)$; $f'(x)=\ln(2-x)-\frac{x}{2-x}$

   b) Montrer que f' la fonction dérivée de f est strictement décroissante sur l'intervalle I.

   c) Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in]0;1[$ tel que $f'(\alpha)=0$ et que : $f(\alpha)=\frac{\alpha^2}{2-\alpha}$

2. a) Etudier les variations de f, puis dresser son tableau de variations .

   b) Montre que la courbe (C_f) est concave

   c) Montrer que : $(\forall x \in I)$; $(\forall x \in I)$, $f(x) \leq f'(t)(x-t)+f(t)$

   d) En déduire que : $(\forall x \in I)$, $f(x) \leq x\ln 2$ et $f(x) \leq -x+1$

3. Représenter (C_f) (On prendra : $\|\vec{i}\|=2cm$)

4. Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f) et les droites d'équations

respectives : $x=0$; $x=1$ et $y=0$

Deuxième partie

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n>2$

On considère la fonction f_n définie sur $I=[0;1]$ par : $f_n(x)=x^n\ln(2-x)$

1. a) Montrer que f_n est positive sur I et que : $f_n(0)=f_n(1)$

   b) Montrer qu'il existe au moins en $\alpha_n \in]0;1[$ tel que : $f_n'(\alpha_n)=0$

2. a) Montrer que f_n est dérivable sur I et que : $f_n'(x)=x^{n-1}g_n(x)$;

   où $g_n(x)=n\ln(2-x)-\frac{x}{2-x}$

   b) Montrer que la fonction g_n est strictement décroissante sur I

   c) En déduire que α_n est unique

4. On considère la suite $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ ainsi définie.

a) Montrer que : $\forall n \geq 2$; $f_n(\alpha_n) = \frac{1}{n} \times \frac{\alpha_n^{n+1}}{2-\alpha_n}$; En déduire que $\lim_{n \to +\infty} f_n(\alpha_n) = 0$

b) Montrer que : $\forall n \geq 2$; $g_n(\alpha_{n+1}) = -\ln(2-\alpha_{n+1})$, en déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ est croissante.

c) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ est convergente.

d) Montrer que $\lim_{n \to +\infty} \alpha_n = 1$

<u>**Troisième partie**</u> :

Pour tout $n \in \mathrm{IN}$ tel que : $n \geq 2$, on pose : $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$

a) Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 2}$ est décroissante et qu'elle convergente.

b) En utilisant l'intégration par parties, montrer que : $I_n = \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{2-x}dx$

c) Montrer que : $\forall n \geq 2$; $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$, en déduire que $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$