guessmath

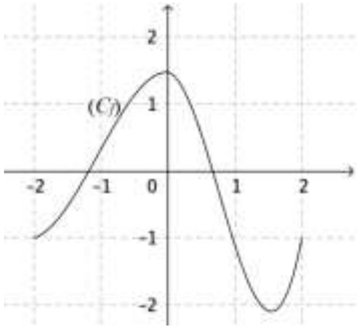
CONTINUITÉ DES FONCTIONS   Terminale S

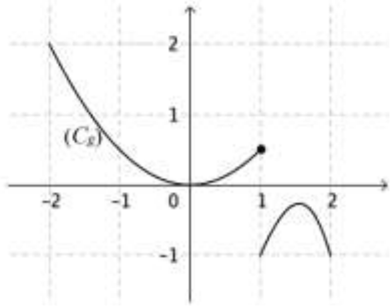
Partie 1 : Notion de continuité

1) Définition

Définition intuitive :
Une fonction est continue sur un intervalle, si sa courbe représentative peut se tracer sans lever le crayon.

Méthode :
Reconnaître graphiquement une fonction continue
Étudier graphiquement la continuité des fonctions f et g définies et représentées ci-dessous sur l'intervalle $[-2;2]$.



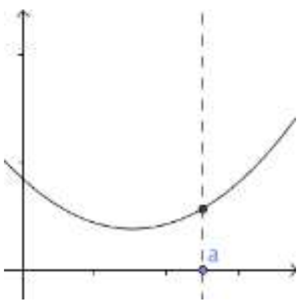


Correction
● *La courbe de la fonction* f *peut se tracer sans lever le crayon, elle semble donc continue sur l'intervalle* $[-2;2]$.
● *La courbe de la fonction* g *ne peut pas se tracer sans lever le crayon, elle n'est donc pas continue sur l'intervalle* $[-2;2]$.
Cependant, elle semble continue sur $[-2;1]$ *et sur* $]1;2]$.

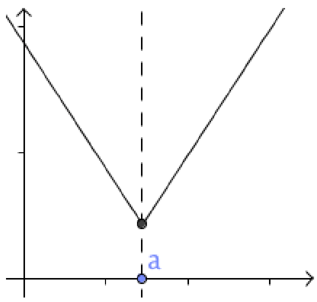
Définition :
Soit une fonction f *définie sur un intervalle* I *contenant un réel* a.
- f *est continue en a si :* $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- f *est continue sur* I *si* f *est continue en tout point de* I.

Théorème :
Si une fonction est dérivable sur un intervalle I, *alors elle est continue sur cet intervalle.*
La réciproque n'est pas vraie.

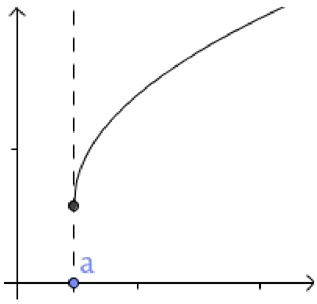
Exemples :



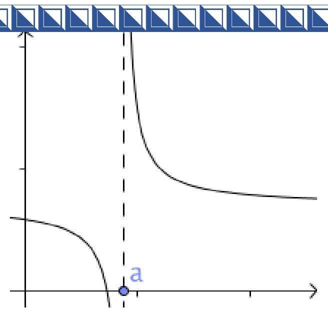
f *est continue en a*



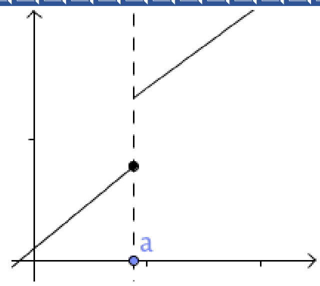
f *est continue en a*



f *est continue en a*



f n'est pas continue en a



f n'est pas continue en a

2) Cas des fonctions de référence

Les fonctions suivantes sont continues sur l'intervalle donné.

Fonction	Intervalle
$\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}$
$x^n \ (n\in\mathbb{N})$	$\mathbb{R}$
Polynôme	$\mathbb{R}$
e^x	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$[0;+\infty[$
$\frac{1}{x}$	$]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$
$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\mathbb{R}$

3) Opérations sur les fonctions continues :

Propriétés :

f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I.

- $f+g$, $f\times g$, $f^n \ (n\in\mathbb{N})$ et e^f sont continues sur I.
- Si g ne s'annule pas sur I, alors $\frac{f}{g}$ est continue sur I.
- Si f est positive sur I, alors $\sqrt{f}$ est continue sur I.

Remarque :

Dans la pratique, les flèches obliques d'un tableau de variations traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

Méthode :

Étudier la continuité d'une fonction définie par morceaux

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x)=-x+2 & si\ x<3 \\ f(x)=x-4 & si\ 3\le x<5 \\ f(x)=-2x+13 & si\ x\ge 5 \end{cases}$

La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Correction

Les fonctions $x\mapsto -x+2$, $x\mapsto x-4$ et $x\mapsto -2x+13$ sont des fonctions polynômes donc continues sur $\mathbb{R}$.

Ainsi la fonction f est continue sur $]-\infty;3[$, sur $[3;5[$ et sur $[5;+\infty[$

Étudions alors la continuité de f en 3 et en 5 :

► $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} -x+2 = -1$

► $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} x-4 = -1$

Donc : $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = f(3)$

Et donc la fonction f est continue en 3.

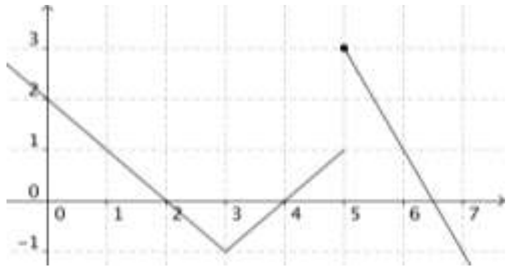
► $\lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^-} x-4 = 1$

► $\lim_{x\to 5^+} f(x) = \lim_{x\to 5^+} -2x+13 = 3$

La limite de f en 5 n'existe pas. On parle de limite à gauche de 5 et de limite à droite de 5.

La fonction f n'est donc pas continue en 5.

La fonction f est continue sur $]-\infty;5[$ *et sur* $[5;+\infty[$.



En représentant la fonction f, on peut observer graphiquement le résultat précédent.

<u>Partie 2 : Théorème des valeurs intermédiaires</u>

<u>Exemple :</u>

On donne le tableau de variations de la fonction f.

x	-4		-3		-1		1
f	-1	↗	3	↘	-1	↗	19

Il est possible de lire dans le tableau, le nombre de solutions éventuelles pour des équations du type $f(x)=k$.

● *L'équation* $f(x)=18$ *possède 1 solution comprise dans l'intervalle* $]-1;1[$.

● *L'équation* $f(x)=0$ *possède* 3 *solutions chacune comprise dans un des intervalles* $]-4;-3[$; $]-3;-1[$ *et* $]-1;1[$.

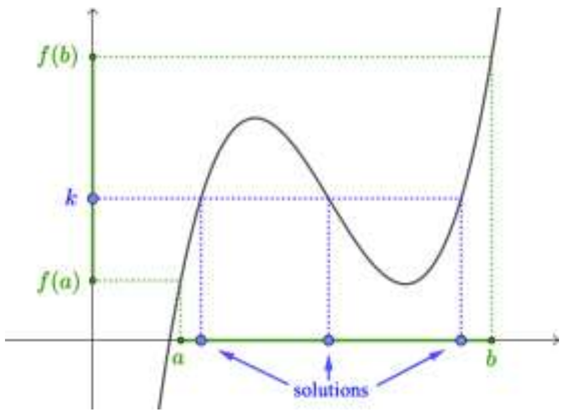
● *L'équation* $f(x)=-3$ *ne possède pas de solution.*

● *L'équation* $f(x)=3$ *possède 2 solutions : l'une égale à* -3 *, l'autre comprise dans l'intervalle* $]-1;1[$.

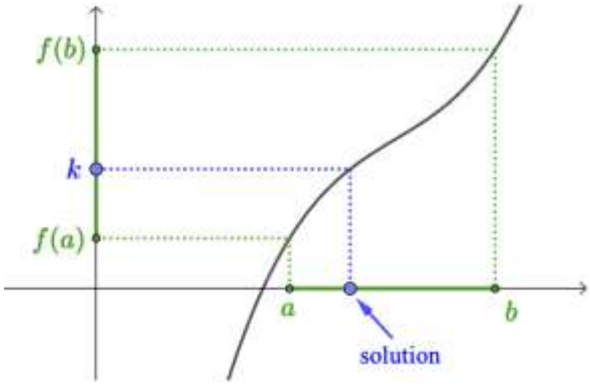
<u>Théorème des valeurs intermédiaires :</u>

● *On considère la fonction f* **continue** *sur l'intervalle* $[a;b]$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ admet au moins une solution comprise entre a et b.



● *Dans le cas où la fonction f est* ***strictement monotone*** *sur l'intervalle* $[a;b]$*, alors la solution est unique.*



Dans la pratique :

Pour démontrer que l'équation $f(x)=0$ *admet une unique solution sur l'intervalle* $[a;b]$*, on démontre que :*

1. f *est* ***continue*** *sur* $[a;b]$
2. f ***change de signe*** *sur* $[a;b]$
3. f *est* ***strictement monotone*** *sur* $[a;b]$

Les conditions 1 et 2 nous assurent que des solutions existent.
Avec la condition 3 en plus, nous savons que la solution est unique.

<u>Méthode :</u>

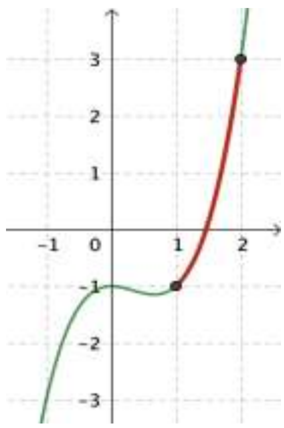
Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires (1)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $f(x)=x^3-x^2-1$

1) Démontrer que l'équation $f(x)=0$ *admet une unique solution α sur l'intervalle* $[1;2]$.

2) À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement au centième de la solution α.

Correction



1) • La fonction f *est* ***continue*** *sur l'intervalle* $[1;2]$ *, car une fonction polynôme est continue sur* $\mathbb{R}$.

• $f(1)=1^3-1^2-1=-1<0$

• $f(2)=2^3-2^2-1=3>0$

Donc la fonction f ***change de signe*** *sur l'intervalle* $[1;2]$.

• $f'(x)=3x^2-2x=x(3x-2)$

Donc, pour tout x de $[1;2]$, $f'(x)>0$.

La fonction f est donc ***strictement croissante*** *sur l'intervalle* $[1;2]$.

➡ *D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation* $f(x)=0$ *admet alors une unique solution sur l'intervalle* $[1;2]$.

X	Y1
1	-1
1.1	-0.879
1.2	-0.712
1.3	-0.493
1.4	-0.216
1.5	0.125
1.6	0.536
1.7	1.023

2) A l'aide de la calculatrice, il est possible d'effectuer des « balayages » successifs en augmentant la précision.

● *La solution est comprise entre* 1,4 et 1,5.

En effet : $f(1,4)\simeq -0;02<0$

$f(1,5)\simeq 0,015>0$

● *La solution est comprise entre* 1,46 *et* 1,47.

X	Y1
1.39	-0.246
1.4	-0.216
1.41	-0.185
1.42	-0.153
1.43	-0.121
1.44	-0.088
1.45	-0.054
1.46	-0.019
1.47	0.0156
1.48	0.0514
1.49	0.0878

En effet : $f(1{,}46) \simeq -0;02 < 0$

$f(1{,}47) \simeq 0{,}015 > 0$

On en déduit que : $1{,}46 < \alpha < 1{,}47$

<u>Remarque :</u>

Une autre méthode consiste à déterminer un encadrement par dichotomie :

<u>Méthode :</u>

Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires (2)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = x^3 - 4x^2 + 6$

Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ *admet au moins une solution sur* $[-1;4]$.

Correction

● *f est* ***continue*** *sur* $[-1;4]$ *car une fonction polynôme est continue sur* $\mathbb{R}$.

● $f(-1) = (-1)^3 - 4(-1)^2 + 6 = 1 > 0$

$f(4) = (4)^3 - 4(4)^2 + 6 = 6 > 0$

Donc ***2 est compris entre*** $f(-1)$ ***et*** $f(4)$.

➞ *D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que l'équation* $f(x) = 2$ *admet au moins une solution sur l'intervalle* $[-1;4]$.

<u>Remarque :</u>

Ici, on n'a pas la stricte monotonie de f, donc on n'a pas l'unicité de la solution.

<u>Partie 3 : Application à l'étude de suites</u>

<u>Théorème :</u>

Soit une fonction f continue sur un intervalle I et soit une suite (u_n) *telle que pour tout n, on a :* $u_n \in I$ *et* $u_{n+1} = f(u_n)$.

Si (u_n) *converge vers L alors* $f(L) = L$.

<u>Méthode :</u>

Étudier une suite définie par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit (u_n) *la suite définie par* $u_0 = 8$ *et pour tout entier naturel n ;* $u_{n+1} = 0{,}85u_n + 1{,}8$.

1) Dans un repère orthonormé, on considère la fonction f définie par : $f(x) = 0{,}85x + 1{,}8$.

a) Tracer les droites d'équations respectives $y = 0{,}85x + 1{,}8$ *et* $y = x$.

b) Dans ce repère, placer u_0 *sur l'axe des abscisses, puis en utilisant les droites précédemment tracées, construire sur le même axe* u_1 ; u_2 *et* u_3. *On laissera apparent les traits de construction.*

c) À l'aide du graphique, conjecturer la limite de la suite (u_n).

2) En supposant que la suite (u_n) *est convergente, démontrer le résultat conjecturé dans la question 1.c.*

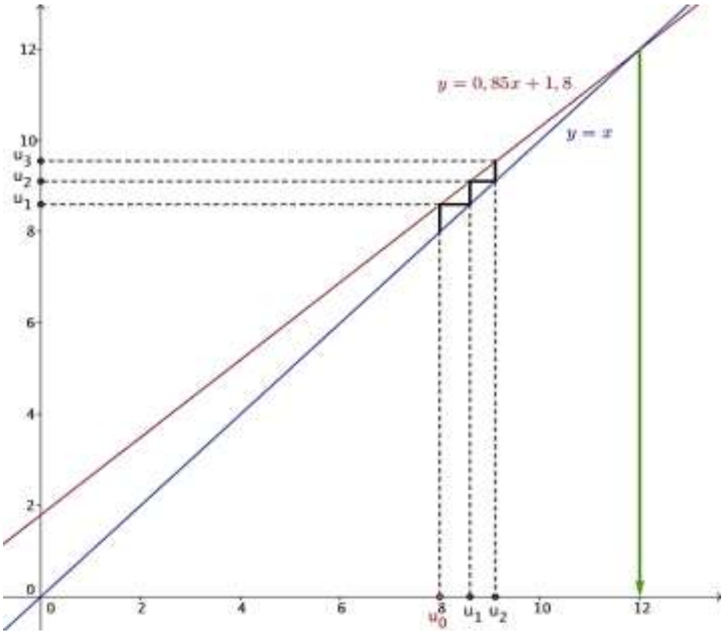
Correction

1) a) b) - On place le premier terme u_0 *sur l'axe des abscisses.*

On trace l'image de u_0 *par f pour obtenir sur l'axe des ordonnées* $u_1 = f(u_0)$.

- On reporte u_1 *sur l'axe des abscisses à l'aide de la droite d'équation* $y = x$.

- On fait de même pour obtenir u_2 *puis* u_3 ...



c) En continuant le tracé en escalier, celui-ci se rapprocherait de plus en plus de l'intersection des deux droites. On conjecture que la limite de la suite (u_n) *est* 12.

2) La suite (u_n) *converge et la fonction* f *est continue sur* $\mathbb{R}$. *La limite L de la suite* (u_n) *est donc solution de l'équation* $f(L) = L$.

Soit : $L = 0,85L + 1,8$

$L - 0,85L = 1,80$

$0,15L = 1,80$

$L = 12$

La suite (u_n) *converge vers* 12.