Examen National baccalauréat
Session de rattrapage 2023_2éme Bac PC-SVt

Exercice 1 (3points) :

On considère la suite numérique (u_n) définie par $u_0=0$ et $u_{n+1}=\dfrac{u_n-2}{2u_n+5}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0,5 **1)** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n>-1$

0,5 **2)** Montrer que la suite (u_n) est décroissante, puis déduire que (u_n) est convergente.

3) On pose $v_n=\dfrac{3}{1+u_n}$; pour tout n de $\mathbb{N}$

0,5 **a)** Montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison 2 puis déterminer son premier terme.

0,5 **b)** Exprimer u_n en fonction de n, pour tout n de $\mathbb{N}$ et déduire la limite de (u_n)

4) On pose $w_n=e^{3-v_n}$ et $S_n=w_0+w_1+\cdots+w_n$, pour tout n de $\mathbb{N}$

0,5 **a)** Montrer que (w_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison et son premier terme.

0,5 **b)** Calculer la limite de la somme S_n.

Exercice 2 (3points) :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$, on considère les points $A(2,1,2)$; $B(-2,0,5)$; $C(4,-5,7)$ et $\Omega(1,-1,0)$. On pose $\vec{u}=\overrightarrow{\Omega A}$

Soit (S) la sphère de centre Ω et de rayon $R=3$

0,5 **1) a)** Montrer que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=13\vec{u}$ et déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.

0,25 **b)** Vérifier que $x+2y+2z-8=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

0,5 **c)** Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) au point A

2) Soient (P) le plan d'équation cartésienne $3x+4y+z+1=0$ et (Δ) la droite passant par le point A et orthogonale au plan (P)

0,5 **a)** Montrer que la droite (Δ) coupe le plan (P) au point $H\left(\dfrac{1}{2},-1,\dfrac{3}{2}\right)$

0,5 **b)** Déterminer les coordonnées du point D tel que le point H soit milieu du segment $[AD]$

3) Soit (Q) le plan passant par le point D et de vecteur normal $\overrightarrow{\Omega D}$

0,25 **a)** Montrer que le plan (Q) est tangent à la sphère (S) en D

0,5 **b)** Montrer que les plans (Q) et (ABC) se coupent suivant la droite (BC)

***Exercice 3* (3points)**

1) *On considère le nombre complexe* $a=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$

0,25 **a)** *Montrer que* $a=\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

0,25 **b)** *Déduire que* a^{2022} *est un nombre réel.*

0,5 **2)** *Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct* $(O;\vec{u};\vec{v})$, *on considère les points A et B d'affixes respectives a et* $\overline{a}$
Déterminer une mesure de l'angle de la rotation R de centre O et qui transforme B en A

3) *On considère dans* $\mathbb{C}$ *l'équation* (E_α) : $z^2-\sqrt{3}z+\alpha=0$ *où* α *est un nombre réel non nul.*

On suppose que l'équation (E_α) *admet deux racines complexes conjuguées non réelles z et* $\overline{z}$

Soient les points $M(z)$; $N(\overline{z})$ *et* $P(\sqrt{3})$ *du plan complexe.*

Sans résoudre l'équation (E_α) :

0,5 **a)** *Justifier que* $\alpha>\frac{3}{4}$ *et que* $\alpha=z\overline{z}$

0,5 **b)** *Montrer que* $|z|=|z-\sqrt{3}|$

0,5 **c)** *En déduire que les points M et N appartiennent à la médiatrice* (Δ) *du segment* $[OP]$

0,5 **d)** *Déterminer la valeur de* α *pour laquelle* $|z-\sqrt{3}|=\sqrt{3}$ *et déduire dans ce cas, les points d'intersection de la droite* (Δ) *et le cercle de centre P et de rayon* $\sqrt{3}$.

***Exercice 4* (3points) :**

Une urne contient quatre boules blanches et deux boules noires, indiscernables au toucher.

1) *On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne.*

0,5 **a)** *Calculer la probabilité de l'événement A :" tirer au moins une boule noire".*

0,5 **b)** *Soit l'événement B : "Obtenir deux boules de même couleur". Montrer que* $p(B)=\frac{7}{15}$

0,5 **c)** *On répète cette expérience cinq fois en remettant dans l'urne les boules tirées, après chaque tirage.*
Quelle est la probabilité pour que l'événement B soit réalisé exactement trois fois.

2) *Dans cette question, on tire des boules de l'urne, une après l'autre et sans remise et on arrête le tirage lorsqu'on obtient une boule blanche pour la première fois.*

Soit X la variable aléatoire qui est égale au nombre de tirages effectués dans cette expérience.

0,25 **a)** *Justifier que les valeurs prises par X sont : 1 ; 2 et 3*

0,25 **b)** *Montrer que* $p(X=2)=\frac{4}{15}$

0,5 **c)** *Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X*

0,5 **d)** *Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule noire ?*

<u>Problème</u> (8 points) :

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ *par :*

$$\begin{cases} f(x)=(x-1)^2 e^{x(2-x)} & ;\ x\leq 2 \\ f(x)=1+(x-2)^2\ln(x-2) & ;\ x>2 \end{cases}$$

Soit (C) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i},\vec{j})$ *(unité :1cm)*

0,5 **1)** *Montrer que la fonction f est continue au point 2*

0,25 **2) a)** *Vérifier que pour tout* $x<2$ *et* $x\neq 0$, $\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=xe^{x(2-x)}-x\frac{e^{x(2-x)}-1}{x(2-x)}$

0,5 **b)** *Montrer que f est dérivable à gauche en* 2.

0,5 **c)** *Montrer que f est dérivable en 2 et que* $f'(2)=0$ *puis interpréter géométriquement le résultat.*

0,25 **3) a)** *Vérifier que pour tout* $x\leq 2$, $f(x)=x(x-2)e^{x(2-x)}+e^{x(2-x)}$

0,5 **b)** *Calculer* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ *et interpréter géométriquement le résultat.*

0,75 **c)** *Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

0,5 **4) a)** *Montrer que pour tout* $x<2$, $f'(x)=2x(x-1)(2-x)e^{x(2-x)}$

0,5 **b)** *Montrer que pour tout* $x>2$, $f'(x)=(x-2)(1+2\ln(x-2))$

0,5 **c)** *Résoudre dans l'intervalle* $]2,+\infty[$ *l'inéquation* $1+2\ln(x-2)\leq 0$

0,75 **d)** *Etudier le signe de* $f'(x)$ *sur* $\mathbb{R}$ *puis dresser le tableau de variations de f sur* $\mathbb{R}$

1 **5)** *Construire la courbe* (C) *dans le repère* $(O;\vec{i},\vec{j})$

(On donne : $f(3)=1$; $2+\frac{1}{\sqrt{e}}\simeq 2{,}6$ *et* $f\left(2+\frac{1}{\sqrt{e}}\right)\simeq 0{,}8$

6) *Soit* $\lambda\in]2,3[$

0,5 **a)** *En utilisant une intégration par parties, montrer que :*

$$\int_{\lambda}^{3}(x-2)^2\ln(x-2)\,dx=-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}(\lambda-2)^3\left(\frac{1}{3}-\ln(\lambda-2)\right)$$

0,5 **b)** *Déduire en fonction de* λ *l'aire* $\mathcal{A}(\lambda)$ *de la partie du plan limitée par la courbe* (C) *et les droites d'équations :* $y=1$, $x=\lambda$ *et* $x=3$

0,25 **c)** *Calculer* $\lim\limits_{\lambda\to 2^+}\mathcal{A}(\lambda)$