1) Introduction d'après un exemple :

Un sac contient 10 boules, 5 boules blanches, 3 boules rouges et 2 boules noires.
On tire simultanément trois boules du sac. Soit X la variable aléatoire lié au nombre de boules blanches contenues dans chaque tirage.
a) Déterminer les valeurs possibles de X.
b) Déterminer l'événement associé à chacune des valeurs de X .
c) Déterminer la loi de probabilité de X.

Solution :

a) les valeurs possibles de X sont : $X=0$; $X=1$; $X=2$; $X=3$
b) $X=0$ *représente l'événement « Le tirage ne contient aucune boule blanche »*
$X=1$ *représente l'événement « Le tirage contient exactement une boule blanche »*
$X=2$ *représente l'événement « Le tirage ne contient exactement deux boules blanches »*
$X=3$ *représente l'événement « Le tirage ne contient exactement trois boules blanches »*
c) La loi de probabilité de X est un tableau contenant deux lignes : La première ligne contient les valeurs possibles de X ، et la deuxième contient les probabilités relatives aux valeurs de X .

On a : ■ $P(X=0)=\frac{C_5^3}{C_{10}^3}=\frac{10}{120}=\frac{1}{12}$

■ $P(X=1)=\frac{C_5^1\times C_5^2}{C_{10}^3}=\frac{10\times 5}{120}=\frac{5}{12}$

■ $P(X=2)=\frac{C_5^2\times C_5^1}{C_{10}^3}=\frac{10\times 5}{120}=\frac{5}{12}$

■ $P(X=3)=\frac{C_5^3}{C_{10}^3}=\frac{10}{120}=\frac{1}{12}$

D'où on déduit la loi de probabilité de X :

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

Probabilité Conditionnelle

1) Etude d'un exemple :

On lance en l'air une pièce de monnaie puis on lance un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.
Considérons les deux événements suivants : A « la pièce a donné F » et A « le dé a donné 3 ou 5 »
a) Déterminer $\text{Card}\Omega$.
b) Calculer $P(A)$; $P(B)$ *et* $P(A\cap B)$.
c) Calculer la probabilité de l'événement B, sachant que l'événement A est réalisé (cette probabilité est notée $P(B/A)$ *ou* $P_A(B)$ *)*
d) Calculer la probabilité de l'événement A , sachant que l'événement B est réalisé (cette probabilité est notée $P(B/A)$ *ou* $P_A(B)$*)*
e) Vérifier que : $P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)$ *et* $P(A\cap B)=P(B)\times P_B(A)$.

www.guessmaths.co E-mail : abdelaliguessouma@gmail.com whatsapp : 0604488896

Solution :

a) On a: $\text{Card}\Omega = 2\times 6 = 12$.

b) On a: ■ $P(A)=\dfrac{\text{Card}A}{\text{Card}\Omega}=\dfrac{6}{12}=\dfrac{1}{2}$ ■ $P(B)=\dfrac{\text{Card}B}{\text{Card}\Omega}=\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3}$ ■ $P(A\cap B)=\dfrac{\text{Card}(A\cap B)}{\text{Card}\Omega}=\dfrac{2}{12}=\dfrac{1}{6}$

c) On a: $P_A(B)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

d) On a: $P_B(A)=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

e) On a: $P(A\cap B)=\dfrac{1}{6}$; $P(A)=\dfrac{1}{2}$; $P(B)=\dfrac{1}{3}$; $P_A(B)=\dfrac{1}{3}$; $P_B(A)=\dfrac{1}{2}$

D'où : $P(A)\times P_A(B)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}=P(A\cap B)$ *et* $P(B)\times P_B(A)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}=P(A\cap B)$

On en déduit que: $P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)$ *et* $P(A\cap B)=P(B)\times P_B(A)$

Les épreuves répétées

Etude d'un exemple :

On lance un dé à six faces numérotées de 1 à 6. Soit A l'événement « obtenir 3 ou 5 », on pose : $p=P(A)$

a) Calculer p.

b) On répète cette expérience 5 fois de suite, quelle est la probabilité pour que l'événement soit réalisé trios fois exactement ?

Solution:

a) On a: $P(A)=\dfrac{\text{Card}A}{\text{Card}\Omega}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$.

b) On a : $p=C_5^3(p)^3(1-p)^2=\dfrac{5!}{2!3!}\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\left(\dfrac{2}{3}\right)^2$.

Propriété :

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ *et soit S un événement dont la probabilité est p. Si l'expérience est répétée n fois, alors la probabilité pour que S soit réalisée k fois exactement* ($0\le k\le n$) *est :* $C_n^k\times p^k\times(1-p)^{n-k}$

Exercice 1

Un sac contient 5 boules blanches, 3 boules rouges et 2 boules noires.
On tire successivement et sans remise, trois boules du sac.
Soit X la variable aléatoire associé au nombre de boules blanches tirées.

a) Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X.
b) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
c) Calculer $E(X)$ *l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.*
d) Calculer $V(X)$ *la variance de la variable aléatoire X et l'écart type* $\sigma(X)$.

Exercice 2

Un sac contient 4 boules blanches, 2 boules rouges et 1 boule noire.
On tire successivement et avec remise, trois boules du sac.

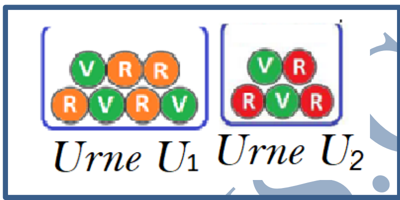
Soit X La variable aléatoire associé au nombre de boules rouges dans un tirage.

a) Déterminer les valeurs de X
b) Déterminer la loi de probabilité de X.
c) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.
d) Calculer $V(X)$ la variance de la variable aléatoire X et l'écart type $\sigma(X)$.

<u>Exercice 3</u> *-Bac 2015 –Session Annulée-*

Une urne U_1 contient 7 boules indiscernables au toucher : 4 Boules rouges et 3 boules vertes
Une urne U_2 contient 5 boules indiscernables au toucher : 3 Boules rouges et 2 boules vertes (voir figures ci-contre)

1) On considère l'expérience suivante :
On tire simultanément trois boules de l'urne U_1.
Soient les deux événements :
A : « Obtenir une boule rouge et deux boules vertes »
B : « les trois boules tirées sont de même couleur »



Montrer que : $P(A)=\dfrac{12}{35}$ *et* $P(B)=\dfrac{1}{7}$.

2) On considère l'expérience suivante :
On tire simultanément deux boules de l'urne U_1 ; puis on tire une seule boule de l'urne U_2
Soit C l'événement : « les trois boules tirées sont rouges »
Montrer que : $P(C)=\dfrac{6}{35}$