Exercice

Partie :

On considère la fonction numérique g définie sur $]0;+\infty[$ *par:* $g(x)=2x\sqrt{x}-2+\ln x$.

1- a- Démontrer que $(\forall x\in]0;+\infty[)$ *;* $g'(x)=3\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}$.

b-Déduire la monotonie de g sur l'intervalle 0, + co

2- Calculer $g(1)$, *puis déduire que pour tout* $x\in[1;+\infty[$ *;* $g(x)\geq 0$.

Partie II:

On considère la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ *par :* $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}+1-x$

et soit C_f *Sa courbe dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1- a- Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ *, puis interpréter géométriquement le résultat.*

b- Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}=0$ *puis déduire* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2- a- Montrer que la droite (Δ) *d'équation* $y=-x+1$ *est une asymptote oblique à la courbe* C_f *au voisinage de* $+\infty$.

b- Etudier la position relative de C_f *et la droite* (Δ).

3- a- Démontrer que : $(\forall x\in]0;+\infty[)$ *;* $f'(x)=\dfrac{-g(x)}{2x\sqrt{x}}$.

b- Calculer $f'(1)$, *puis donner une interprétation géométrique du résultat.*

c- Etudier les variations de f.

4- Construire la courbe C_f .

Partie III :

Soit (U_n) *la suite numérique définie par :* $\begin{cases} U_0=\dfrac{3}{2} \\ U_n=\dfrac{\ln(U_n)}{\sqrt{U_n}}+1 \quad (\forall n\in\mathbb{N}) \end{cases}$

1- Démontrer par récurrence que: $(\forall n\in\mathbb{N})$ *;* $U_n\geq 1$.

2- Démontrer que $(\forall n\in\mathbb{N})$ *;* $U_{n+1}=f(U_n)+U_n$ *et déduire la monotonie de* (U_n).

3-Déduireo que la suite (U_n) *est convergente et déterminer sa limite.*

Solution

Partie I:

1- a- On a :($(\forall x\in]0;+\infty[)$ *;* $g'(x)=2\left(\sqrt{x}+\dfrac{x}{2\sqrt{x}}\right)+\dfrac{1}{x}$

$$=2\sqrt{x}+\sqrt{x}+\frac{1}{x}$$

$$=3\sqrt{x}+\frac{1}{x}$$

b- Comme $x\in\left]0;+\infty\right[$ alors $3\sqrt{x}+\frac{1}{x}>0$; d'où g est strictement croissante sur $\left]0;+\infty\right[$.

2- On a : $g(1)=2\times1\times\sqrt{1}-2+\ln(1)=0$ et comme g est croissante sur $\left]0;+\infty\right[$ alors pour tout $x\in\left[1;+\infty\right[$; $g(x)\geq 0$.

Partie II :

1- a - On a: $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}+1-x\right)$

$$=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\times\ln x+1-x\right)=-\infty \quad (\text{Car : } \lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=+\infty \text{ et } \lim_{x\to0^+}\ln x=-\infty)$$

Interprétation géométrique *:*

la droite d'équation ($x=0$)l'axe des ordonnées est une asymptote verticale à la courbe C_f.

b- On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}2\times\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=0$ (Car $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0$)

Donc: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\times\ln x+1-x\right)=-\infty$

2- a- On a: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(-x+1)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}+1-x-(-x+1)\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)=0 \qquad (\text{car } \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}2\times\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=0)$$

Donc la droite (Δ) d'équation $y=-x+1$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $+\infty$.

b- On a: $\left(f(x)-(-x+1)\right)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

Donc le signe de $f(x)-(-x+1)$ est celui de $\ln x$ par conséquent:

- Si $0<x\leq1$ alors $f(x)-(-x+1)\leq0$

  D'où C_f est au-dessous de la droite (Δ) sur $\left]0;1\right]$.

- Si $x\geq1$ alors $f(x)-(-x+1)\geq0$

  D'où C_f est au-dessus de la droite (Δ) sur $\left[1;+\infty\right[$.

  C_f coupe la droite (Δ) au point $(1;0)$.

3- a- La fonction f est dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$ comme quotient et somme de fonctions dérivables.

On a pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$: $f'(x)=\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}+1-x\right)'$

$$=\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)'-1$$

$$=\frac{\frac{1}{x}\times\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\times\ln x}{\left(\sqrt{x}\right)^2}-1$$

$$=\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x}-1$$

$$= \frac{\frac{2-\ln x}{2\sqrt{x}}}{2x\sqrt{x}} - 1$$

$$= \frac{2-\ln x - 2x\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}}$$

$$= \frac{-\left(2x\sqrt{x} - 2 + \ln x\right)}{2x\sqrt{x}}$$

$$= \frac{-g(x)}{2x\sqrt{x}}$$

b- On a: $f'(1) = \frac{-g(1)}{2\times 1\times\sqrt{1}} = 0$

Donc la courbe C_f *admet une tangente horizontale au point* $(1;0)$.

c- Le signe de f' (x) est le signe contraire de $g(x)$ *et d'après la question 2 de la **patrie I***

On déduit que :

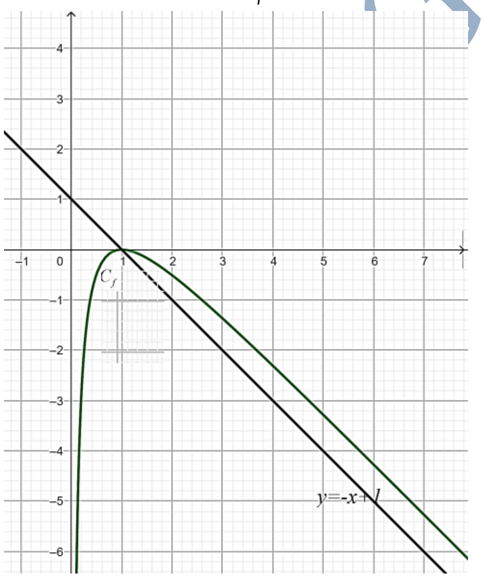
■ *pour tout* $x \in [1;+\infty[$; $f'(x) \leq 0$.

■ *pour tout* $x \in]0;1]$; $f'(x) \geq 0$.

D'où le tableau de variation de f:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

4- Construction de C_f



Partie III :

1- Montrons par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $U_n \geq 1$; *Proposition* $P(n)$.

Initialisation

On a : $U_0 = \dfrac{3}{2}$; *alors* $U_0 \geq 1$*donc* $P(0)$*est vraie.*

Hérédité

Supposons que $P(n)$ *est vraie càd :* $U_n \geq 1$*et montrons que* $P(n+1)$*est vraie càd :* $U_{n+1} \geq 1$

On a : $U_n \geq 1$ *donc* $\ln(U_n) \geq 0$ *; par suite* $\ln(U_n)+1 \geq 1$*Un D'où n*$U_{n+1} \geq 1$*par conséquent* $P(n+1)$*est vraie.*

Conclusion

On a montré par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $U_n \geq 1$

2- On a pour tout $n \in \mathbb{N}$ *:*

$$f(U_n) = \frac{\ln(U_n)}{\sqrt{U_n}} + 1 - U_n$$
$$= U_{n+1} - U_n$$

càd pour tout $n \in \mathbb{N}$ *:* $U_{n+1} = f(U_n) + U_n$

Comme pour tout $x \in [1;+\infty[$; $f(x) \leq 0$ *et* $(\forall n \in \mathbb{N})$; $U_n \geq 1$ *alors* $U_{n+1} - U_n \leq 0$

D'où la suite (U_n)*est décroissante.*

3- La suite (U_n)*est décroissante et minorée par* 1 *donc elle est convergente.*

Soit $l = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n$ *; on a :*

■ *f est continue sur l'intervalle* $[1;+\infty[$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *:* $U_{n+1} = f(U_n) + U_n$

Alors : $l = f(l) + l$ *; càd* $f(l) = 0$ *; par suite :* $l = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 1$