EXERCICES-« SUITES NUMERIQUES » 1ére Bac SM

Exercice 1

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$

1) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante

2) Déterminer les réels a et b tels que $(\forall k\in\mathbb{N}^*)\ \frac{1}{k(k+1)}=\frac{a}{k}+\frac{b}{k+1}$

3) En déduire que $(u_n)_{n\geq 1}$ est majorée .

Exercice 2

On considère la suite réelle $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ v_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$

1) Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leq v_n\leq\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$, puis en déduire que $(v_n)_{n\geq 1}$ est bornée.

Exercice 3

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0=3$ et $\forall n\in\mathbb{N}: u_{n+1}=\frac{12u_n-9}{4u_n}$

1) Calculer u_1 et u_2

2) On pose $\forall n\in\mathbb{N}:\ v_n=\frac{2}{2u_n-3}$

a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est arithmétique dont on déterminera le premier terme et la raison.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n

c) Calculer $A=v_0+v_1+v_2+\cdots+v_{99}$.

Exercice 4

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0=1$, $u_1=3$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*: u_{n+1}=10u_n-9u_{n-1}$.

On pose $\forall n\in\mathbb{N}: v_n=u_{n+1}-u_n$

1) Montrer que la suite (v_n) est géométrique et exprimer v_n en fonction de n

2) Démontrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*: u_n=v_0+v_1+v_2+...+v_{n-1}+u_0$

3) En déduire u_n en fonction de n

Exercice 5

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0=0$, $u_1=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}: u_{n+2}=\frac{2}{3}u_{n+1}-\frac{1}{9}u_n$.

On pose $\forall n\in\mathbb{N}: v_n=u_{n+1}-\frac{1}{3}u_n$ et $w_n=3^n u_n$

1) Montrer que la suite (v_n) est géométrique et exprimer v_n en fonction de n

2) Montrer que la suite (w_n) est arithmétique et exprimer w_n en fonction de n

3) Calculer en fonction de n les sommes $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ et $T_n = 3u_1 + 3^2 u_2 + \cdots + 3^n u_n$

Exercice 6

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{5u_n}{2u_n + 3}$; $n \in \mathbb{N}$.

On pose $\forall n \in \mathbb{N} :\ v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n}$

1) Montrer que la suite (v_n) est géométrique

2) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

Exercice 7

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$; $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} :\ 0 < u_n < 2$

2) Étudier le sens de variation de (u_n).

3) a) Montrer que pour tout entier n, on a : $|u_{n+1} - 2| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - 2|$

b) En déduire par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} :\ |u_n - 2| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Exercice 8

On considère les deux suites réelles (u_n) et (v_n) définies par :

$u_0 = 4$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$; $n \in \mathbb{N}$ et $v_0 = 3$, $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2}$; $n \in \mathbb{N}$

1) Montrer que la suite (w_n) définie par $w_n = v_n - u_n$; $n \in \mathbb{N}$ est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison

2) Etudier le sens de variation de (u_n) et (v_n)

3) Montrer que (u_n) est majorée par 4 et (v_n) est minorée par 3.

4) On considère la suite numérique (t_n) définie par : $t_n = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$; $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que (t_n) est constante, puis en déduire u_n et v_n en fonction de n.

Exercice 9

On considère la suite réelle (u_n) définie par $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{u_n} + u_n\right)$; $\forall n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 4$

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > \sqrt{3}$

2) a -Montrer que pour tout entier n, on a: $u_{n+1} - \sqrt{3} \leq \dfrac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{3}\right)$

b - En déduire par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n - \sqrt{3} \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \left(4 - \sqrt{3}\right)$

Exercice 10

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\geq 1}$ *définie par :*

$$u_1 = 2 \ , \ et \quad \left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \sqrt{n+1} - \frac{3}{2}\sqrt{n} + \frac{1}{2}\sqrt{n-1}.$$

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad v_n = u_n - \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)$

1) *Montrer que la suite* $(v_n)_{n\geq 1}$ *est géométrique de raison* $\frac{1}{2}$

2) *Exprimer* v_n *puis* u_n *en fonction de* n

3) *Calculer* $T_n = \sum_{k=1}^{k=n} v_k$ *et* $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} u_k$ *en fonction de* n .

Exercice 11

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\geq 0}$ *définie par* $u_0 = \frac{1}{5}$ *et* $u_{n+1} = u_n^2 + \frac{3}{4}u_n \ ; \ n \in \mathbb{N}$.

1) *Montrer par récurrence que :* $\forall n \in \mathbb{N} : 0 < u_n \leq \frac{1}{5}$

2) *Etudier le sens de variation de* (u_n)

3) *a - Montrer que pour tout entier* n *, on a :* $u_{n+1} \leq \frac{19}{20}u_n$

b - En déduire par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq \frac{1}{5}\left(\frac{19}{20}\right)^n$

On pose : $\forall n \in \mathbb{N} : \quad S_n = u_0 + u_1 + \cdots u_n$. *Montrer que* $0 < S_n < 4$.