

Exercice 1

Soit (U_n) la suite définie par : $U_n = \sum_{p=0}^{2n+1} \frac{n}{n^2 + p}$

1) montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 2 - \frac{2}{n+1} \leq U_n \leq 2 + \frac{2}{n}$

2) a) vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \sqrt{n} - \sqrt{n-1} \geq \frac{1}{2n}$

b) en déduire $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \leq 2\sqrt{n}$

3) On pose : $S_n = \sum_{k=1}^n U_k$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 2n - 4\sqrt{n+1} \leq S_n \leq 2n + 4\sqrt{n}$.

b) Déterminer la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

Exercice 2

Soit (U_n) une suite géométrique de raison q telle que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; U_n \neq 0$.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$; On pose : $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1}$; $P_n = U_0 U_1 \dots U_{n-1}$ et

$$T_n = \frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_1} + \dots + \frac{1}{U_{n-1}}$$

Montrer que : $\frac{S_n}{T_n} = U_0^2 q^{n-1}$ déduire $P_n^2 = \left(\frac{S_n}{T_n} \right)^n$

Exercice 3

On considère les suites (U_n) et (V_n) telles que : $U_n = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ et $V_n = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$

1) Montrer que (U_n) et (V_n) sont adjacentes.

2) On pose : $f_n(x) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \right)$

a) Montrer que : $f'_n(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}$

b) Prouver que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; f_{2n+1}(x) \leq \arctan(x) \leq f_{2n}(x)$

c) Déduire la limite commune des suites (U_n) et (V_n) .

Exercice 4

Soit n un entier supérieur à 3.

On considère la fonction $f_n(x) = x^n - n(x-1) - 2$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

1) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet deux solutions u_n et v_n avec $u_n < 1 < v_n$.

2) a) Etudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$

b) Etudier la monotonie de (u_n) en déduire qu'elle est convergente

c) Montrer que : $(\forall n \geq 3) ; \frac{-2}{n} \leq u_n - 1 \leq \frac{-1}{n}$ et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

3) Etudier la monotonie de (v_n) et déduire qu'elle est convergente.

4) a) Montrer que : $(\forall n \geq 3) ; v_n > 1 + \frac{1}{n}$ (on donne $(\forall n \geq 3) ; \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$).

b) Montrer que : $(\forall a > 0) ; (\forall n \in \mathbb{N}^*) (1+a)^n \geq 1 + na + \frac{n(n-1)}{2} a^2$

c) Calculer $f_n\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ puis déduire $(\forall n \geq 3) ; v_n < 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$

d) Déterminer la limite de la suite (v_n) .