exercice 1

Soit f la fonction définie sur IR^* par : $f(x)=\frac{e^x}{x^3}$ et C_f sa courbe représentative.

a. Etudier les variation de f sur IR^* .

b. Montrer que la droite (Δ) d'équation $x=3$ n'est pas un axe de symétrie de la courbe C_f .

c. Montrer que C_f admet une unique tangente parallèle à l'axe (Ox) et elle est obtenue au point d'abscisse 3.

d. La tangente à C_f au point d'abscisse 1 a pour équation : $y=-2ex+3e$.

Correction

a. La fonction f est dérivable sur IR^* et on a :

$$f'(x)=\frac{x^3e^x-3x^2e^x}{(x^3)^2}=\frac{x^2e^x(x-3)}{x^3}=\frac{e^x(x-3)}{x^4}$$

Etudions le signe de f' :

f' est de même signe que $(x-3)$; donc f' est positive sur l'intervalle $[3;+\infty[$ et négative sur l'intervalle $]-\infty;0[\cup]0;3]$ d'où : f est croissante sur l'intervalle $[3;+\infty[$ et décroissante sur l'intervalle $]-\infty;0[\cup]0;3]$.

b. Si la droite (Δ) on doit avoir les deux conditions de symétrie satisfaites ;

$$\begin{cases} 3-x\in IR^* \Leftrightarrow 3+x \\ f(3-x)=f(3+x) \end{cases}$$

Or aucune condition n'est satisfaite car pour $x=3$ $(6\in IR^*\ mais\ \ 0\notin IR^*)$ et aussi $f(3-x)\neq f(3+x)$ (facile à vérifier)

c. f' s'annule uniquement pour x = 3 donc C_f admet une unique tangente parallèle à l'axe

(Ox) et elle est obtenue au point d'abscisse x = 3.

d. La tangente à C_f au point d'abscisse 1 a pour équation : $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ donc :

$$y=\frac{e^1(1-3)}{1^4}(x-1)+\frac{e^1}{1^3}=-2e(x-1)+e$$

$$y=-2ex+3e$$

.

exercice 2

Soit f la fonction définie sur par : $f(x)=\frac{e^{-x}}{x^2+1}-\frac{x}{2}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1- Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ et calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2- Etudier les variation de f , et dresser son tableau de variation .

3- Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans IR , Donner un encadrement de cette solution d'amplitude ***0,5***.

4- Montrer que la droite (D) d'équation $y=-\frac{x}{2}$ est asymptote à $\mathcal{C}$.

WWW.GUESSMATHS.CO

5- Etudier la position relative de $\mathcal{C}$ et (D).

6- Construire $\mathcal{C}$ et (D) dans un même repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$.

WWW.GUESSMATHS.CO

Correction

1- ■ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{-x}}{x^2+1}-\frac{x}{2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^x(x^2+1)}-\frac{x}{2}\right)=-\infty\left(car\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^x(x^2+1)}\right)=0\right)$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

■ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{e^{-x}}{x^2+1}-\frac{x}{2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{e^{-x}}{(-x)^2}\times\frac{x^2}{(x^2+1)}-\frac{x}{2}\right)=+\infty\left(car\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{e^{-x}}{(-x)^2}\right)=+\infty\right)$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

2- Calculons $f'(x)$ pour tout x dans IR .

$$f'(x)=\left(\frac{e^{-x}}{x^2+1}-\frac{x}{2}\right)'=\frac{-e^{-x}(x^2+1)-2xe^{-x}}{(x^2+1)^2}-\frac{1}{2}=\frac{-e^{-x}(x^2+2x+1)}{(x^2+1)^2}-\frac{1}{2}=\frac{-e^{-x}(x+1)^2}{(x^2+1)^2}-\frac{1}{2}$$

$$d'où : f'(x)=-\left(\frac{e^{-x}(x+1)^2}{(x^2+1)^2}+\frac{1}{2}\right)$$

Donc : $(\forall x\in IR)\ f'(x)<0$ on en conclue que la fonction f est strictement décroissante sur IR .

Tableau de variation de f :

x	-∞	+∞
$f'(x)$	-	
$f'(x)$	+∞ ↘	-∞

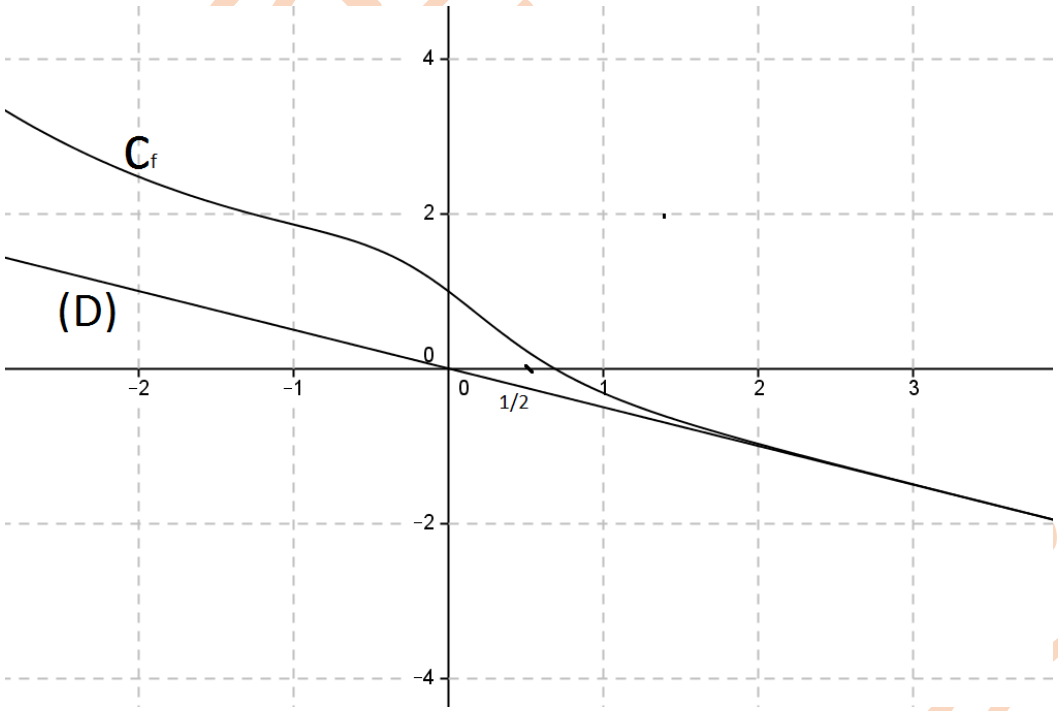
3- Puisque la fonction f est strictement décroissante sur IR alors

$f(IR)=\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x);\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right[=]-\infty:+\infty[\Rightarrow(\exists!\alpha\in IR)/\ f(\alpha)=0$. Donc l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique dans IR .Et on a $f(0)=1$et $f(1)=\frac{1}{2e}-\frac{1}{2}<0$ $(2e>2)$ Donc $\alpha\in]0;1[$.

De plus on a $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{\frac{5}{4}e}-\frac{1}{2}=\frac{7}{10e}>0$. DONC $\alpha\in\left]\frac{1}{2};1\right[$

4- On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-\left(-\frac{x}{2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{-x}}{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^x(x^2+1)}\right)=0$

Donc la droite (D) d'équation $y=-\frac{x}{2}$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$.

5- On a $(\forall x\in IR)\quad f(x)-\left(-\frac{x}{2}\right)=\left(\frac{e^{-x}}{x^2+1}\right)>0$ donc $\mathcal{C}$ est au dessus de la droite (D) sur IR.

6- Construction graphique