

Exercice 1 (3pts)

On considère dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(\vec{o}; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ le plan P d'équation : $y - z = 0$ et la sphère (S) d'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 1 = 0$$

1. a) Montrer que le point $\Omega(1,1,1)$ est le centre de la sphère (S) et 2 est son rayon.
b) Calculer $d(\Omega, (P))$, et déduire que le plan P coupe la sphère (S) selon un cercle (C) .
c) Déterminer le centre et le rayon du cercle (C) .
2. soit (Δ) la droite qui passe par $A(1, -2, 2)$ et qui est perpendiculaire au plan (P) .
a) Montrer que $\vec{u}(0, 1, -1)$ est un vecteur directeur de la droite (Δ) .
b) Montrer que : $\|\vec{\Omega A} \wedge \vec{u}\| = \sqrt{2} \|\vec{u}\|$ et déduire que la droite (Δ) coupe la sphère (S) en deux points.
c) Déterminer les coordonnées des deux points d'intersection de la droite (Δ) coupe et la sphère (S) .

Exercice 2 (3pts)

Une Urne contient 10 boules indiscernables au toucher:

5 boules Blanches ,3 boules Rouges et 2 Boules Vertes .

On tire de façon aléatoire et simultanément 4 boules de L'urne.

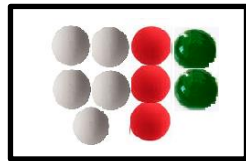
1. On considère l'événement A : « parmi les 4 boules tirées une seule boule est verte » et l'événement B : « parmi les 4 boules tirées on obtient exactement 3 boules de même couleur ».

Montrer que : $p(A) = \frac{8}{15}$ et $p(B) = \frac{19}{70}$.

2. Soit la variable aléatoire X liée à chaque tirage au nombre de boules Vertes tirées.

a) Montrer que : $p(X = 2) = \frac{2}{15}$

b) déterminer la loi de probabilité de X et que l'espérance mathématique $E(X)$ est égale à $\frac{4}{5}$



Exercice 3 (3pts)

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation:

$$z^2 + 4z + 8 = 0$$

2. On considère le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et les points A, B et C d'axes respectifs $a = -2 + 2i$

$$b = 4 - 4i \text{ et } c = 4 + 8i$$

a) Soit z l'axe du point M du plan et z' l'axe du point M' image de M par la rotation R de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Montrer que : $z' = -iz - 4$

b) Vérifier que le point B est l'image du point C par la rotation R et déduire la nature du triangle ABC .

3. Soit ω l'axe du point Ω milieu du segment $[BC]$.

a) Montrer que : $|c - \omega| = 6$.

b) Montrer que l'ensemble des points M d'axe z tel que : $|z - \omega| = 6$ est le cercle qui circonscrit le triangle ABC .

Exercice 4 (2,5 pts)

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par:

$$\begin{cases} U_0 = 17 \\ U_{n+1} = \frac{1}{4}U_n + 12 \end{cases}$$

1. a) Montrer par récurrence que : $U_n > 16$ pour tout n dans $\mathbb{N}$.

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante et déduire qu'elle est convergente

2. soit la suite $V_n = U_n - 16$ pour tout n dans $\mathbb{N}$.

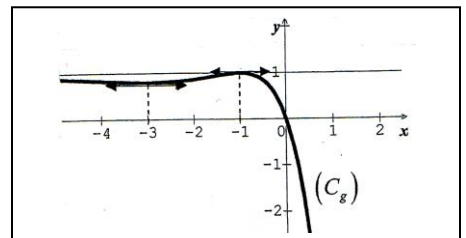
a) montrer que la suite (V_n) est géométrique.

b) Déduire que $u_n = 16 + \left(\frac{1}{4}\right)^n$ pour tout n dans $\mathbb{N}$ et déterminer la limite de la suite (U_n)

Problème (8,5 pts)

I - Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 1 - (1+x)^2 e^x$$



1. Vérifier que : $g(0) = 0$
2. En utilisant la représentation graphique de g (le schéma ci-dessus) montrer que :

$$g(x) \geq 0 \quad (\forall x \in]-\infty, 0])$$

$$g(x) \leq 0 \quad (\forall x \in [0, +\infty[)$$

II- Soit f la fonction définie par : $f(x) = x + 1 - (x^2 + 1)e^x$

et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité 2cm).

1. a) Vérifier que : $f(x) = x + 1 - 4\left(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - e^x \quad (\forall x \in \mathbb{R})$ en déduire que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

- b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (x + 1))$ montrer que la droite (D) d'équation

$y = x + 1$ est une asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$.

- c) Montrer que la courbe (C_f) est au-dessous de la droite (D) .

2. a) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

$$\left(\text{on écrira } f(x) \text{ sous la forme } x \left[1 + \frac{1}{x} - \left(x + \frac{1}{x} \right) e^x \right] \right)$$

- b) Montrer que la courbe (C_f) admet un branche parabolique au voisinage de $+\infty$ de direction à déterminer.

3. a) Montrer que $f'(x) = g(x)$ pour tout x dans $\mathbb{R}$.

- b) Montrer que la fonction f est croissante sur $]-\infty, 0]$ et décroissante sur $[0, +\infty[$, puis dresser le tableau de variation de f .

- c) Montrer que la courbe (C_f) admet deux points d'inflexion leurs abscisses respectifs (-3) et (-1) .

4. Tracer dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ la droite (D) et la courbe (C_f)

on admet $f(-1) \simeq -5,44$ et $f(-3) \simeq -2,5$

5. a) Vérifier que $H : x \mapsto (x-1)e^x$ est une primitive de $h : x \mapsto xe^x$ et que :

$$\int_{-1}^0 (x^2 + 1)e^x dx = 3 \left(1 - \frac{2}{e} \right)$$

- b) Calculer en cm^2 l'air de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f) , la droite (D) , l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = -1$.