Exercice 1 :

Ecrire les nombres complexes suivants sous leur forme exponentielle.

$z_1=\dfrac{1+i}{1-i}$; $z_2=\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^3$; $z_3=\left(1+i\sqrt{3}\right)^4$; $z_4=\left(1+i\sqrt{3}\right)^5+\left(1-i\sqrt{3}\right)^5$;

$z_5=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$; $z_6=\dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2-2i}$

Correction exercice 1

■ $z_1=\dfrac{1+i}{1-i}$

$$=\frac{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)}{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)}$$

$$=\frac{\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}$$

$$=\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{-i\frac{\pi}{4}}}$$

$$=e^{i\frac{\pi}{2}}$$

■ $z_2=\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^3$

$$=\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^3=e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

■ $z_3=\left(1+i\sqrt{3}\right)^4$

$$=\left(\sqrt{1^2+\sqrt{3}}\right)^4\left(\frac{1}{\sqrt{1^2+\sqrt{3}}}+i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1^2+\sqrt{3}}}\right)^4$$

$$=2^4\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4$$

$$=16\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^4$$

$$=16\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^4=16\,e^{i\frac{4\pi}{6}}=16\,e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

■ $z_4=\left(1+i\sqrt{3}\right)^5+\left(1-i\sqrt{3}\right)^5$

$$=\left(2\,e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^5+\left(2\,e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)^5$$

$$=2e^{i\frac{5\pi}{6}}+e^{-i\frac{5\pi}{6}}$$

$$=2\cos\frac{5\pi}{6}$$

$$=-2\cos\frac{5\pi}{6}e^{i\pi}$$

Car : $\cos\frac{5\pi}{6}<0$

■ $z_5=\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$

$$=\frac{2\,e^{i\frac{\pi}{3}}}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)}$$

$$=\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$=\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{6}}}$$

$$=e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$=e^{i\frac{\pi}{6}}$$

■ $z_6=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2-2i}$

$$=\frac{2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)}{2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)}$$

$$=\frac{\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)}{\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=\frac{\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)}{\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)-i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}$$

$$=\frac{e^{-i\frac{\pi}{6}}}{e^{-i\frac{\pi}{4}}}=e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)}=e^{i\frac{\pi}{12}}$$

Exercice 2 :

Calculer les racines carrées des nombres suivants.

$z_1 = -1$; $z_2 = i$; $z_3 = 1+i$; $z_4 = -1-i$;

$z_5 = 1+i\sqrt{3}$;

$z_6 = 3+4i$; $z_7 = 7+24i$; $z_8 = 3-4i$; $z_9 = 24-10i$

Correction exercice 2

On cherche les nombres complexes tels que $\omega^2 = z_1$ *càd :* $\omega^2 = -1$

$\omega_1 = -i$ *ou* $\omega_2 = i$

On cherche les nombres complexes tels que $\omega^2 = z_2$ *càd :* $\omega^2 = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$\omega_1 = -e^{i\frac{\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ *ou* $\omega_2 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

On cherche les nombres complexes tels que $\omega^2 = z_3$ *càd :* $\omega^2 = 1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$\omega_1 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi}{8}} = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$ *ou* $\omega_2 = -\sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi}{8}} = \sqrt[4]{2}\left(-\cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8}\right)$

C'est un peu insuffisant parce que l'on ne connait pas les valeurs de $\cos\frac{\pi}{8}$ *et de* $\sin\frac{\pi}{8}$.

Deuxième méthode

$z_6 = 3+4i$

$3+4i = 4+4i-1 = (2+i)^2$ *et on retrouve que les racines carrées de* $z_6 = 3+4i$ *sont* $(2+i)$ *ou* $-(2+i)$.

De la même façon on calcul les autres racines carrées.