guessmaths **Série 6 d'exercices limites et continuité** **Bac PC-SVT**

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ *par :* $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}$

Déterminer les limites de f, si elles existent, en 0 et en +∞.

Correction exercice 1 :

Le numérateur et le dénominateur s'annulent en 0 *, il s'agit donc d'une forme indéterminée.*

Première méthode

On va multiplier par l'expression conjuguée.

Soit $x\neq 0$; $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}$

$$=\frac{x\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}{\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}$$

$$=\frac{x\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}{\left(1+x^2\right)-\left(1+x\right)}$$

$$=\frac{x\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}{x^2-x}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}{x-1}$$

Donc $\lim\limits_{x\to 0}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}{x-1}=-2$

Deuxième méthode

On pose $g\left(x\right)=\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}$; *la fonction g est dérivable en* 0 *et* $\left(\forall x\in\left]-1;+\infty\right[\right)$;

$g'\left(x\right)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$ *; comme g est dérivable en* 0 *alors :* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g\left(x\right)-g\left(0\right)}{x-0}=g'\left(0\right)=-\dfrac{1}{2}$

Or on a pour tout $x\in\left]-1;+\infty\right[$ *et* $x\neq 0$; $f\left(x\right)=\dfrac{1}{g\left(x\right)}$ *et la fonction* $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ *et continue sur* IR^*

alors : $\lim\limits_{x\to 0}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{g\left(x\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\frac{g\left(x\right)}{x}}=-2$

En +∞ le numérateur tend vers l'infini et le dénominateur est de la forme (+∞ − ∞), il est donc lui-même une forme indéterminée. On peut penser à multiplié par l'expression conjuguée mais en regardant cette expression on voit que l'on retombe sur une forme indéterminée, nous allons voir une autre technique.

En $+\infty$ $x>0$; donc $|x|=x$ alors : $f(x)=\dfrac{x}{|x|\left(\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}-\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}}\right)}$

$$=\frac{1}{\left(\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}-\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}}\right)}$$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}-\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}}=1$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\left(\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}-\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}}\right)}=1$

Exercice 2 :

Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}{x^2}$

Correction exercice 2:

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$ déjà vu dans le premier exercice $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}=-f(x)$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}=\frac{1}{2}$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}{x^2}$ il s'agit d'une forme indéterminée de la forme "$\dfrac{\infty}{\infty}$" .

Première méthode :

Soit $x>0$; on a $|x|=x$ en factorisant par x^2 au numérateur on obtient :

$$\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}{x^2}=\frac{\sqrt{x^2\left(\dfrac{1}{x^2}+1\right)}-\sqrt{x^2\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}\right)}}{x^2}$$

$$=\frac{|x|\left(\sqrt{\left(\dfrac{1}{x^2}+1\right)}-\sqrt{\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}\right)}\right)}{x^2}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{\left(\dfrac{1}{x^2}+1\right)}-\sqrt{\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}\right)}\right)}{x}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\left(\dfrac{1}{x^2}+1\right)}-\sqrt{\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}\right)}\right)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$

Alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}{x^2}=0$

Deuxième méthode :

Soit $x>0$ *en multipliant et divisons par le conjugué du numérateur ; on obtient :*

$$\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}{x^2}=\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}$$

$$=\frac{\cancel{1}+x^2-\cancel{1}-x}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}$$

$$=\frac{x-1}{x}\times\frac{1}{\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x}=1$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)=+\infty$ *donc :* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}$

Alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}{x^2}=1\times0=0$

Exercice 3 :

Soit f *définie sur IR par :* $f(0)=0$ *et* $f(x)=x+\frac{\sqrt{x^2}}{x}$ *si* $x\neq0$

Etudier la continuité de la fonction f en 0 .

Correction exercice 3 :

$f(0)=0$ *et* $f(x)=x+\frac{\sqrt{x^2}}{x}$ *si* $x\neq0$

Pour tout $x\in IR$ *on a :* $\sqrt{x^2}=|x|$ *, nous allons donc distinguer deux cas* $x<0$ *et* $x>0$.

Si $x<0$ *alors* $f(x)=x+\frac{\sqrt{x^2}}{x}=x+\frac{|x|}{x}=x+\frac{-x}{x}=x-1$ *donc* $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}x-1=-1$

Si $x>0$ *alors* $f(x)=x+\frac{\sqrt{x^2}}{x}=x+\frac{|x|}{x}=x+\frac{x}{x}=x+1$ *donc* $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}x+1=1$

Par conséquent $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ *Ce qui montre que f n'est pas continue en 0.*