1. *Montrer que les équations suivantes ont au moins une solution dans l'intervalle indiqué :*
   a) $x^7 - x^2 + 1 = 0$ *sur* $[-2;0]$
   b) $\tan(x) = \frac{3}{2}x$ *sur* $\left]\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right[$
   c) $\sqrt[3]{x^3+6x+1} = 3x+2$ *sur* $\mathbb{R}$
2. a) *Montrer que l'équation* $\frac{1}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-2)^5} = 0$ *possède dans* $]1;2[$ *une solution unique.*
   b) *Montrer que cette équation n'admet pas de solution dans les intervalles* $]-\infty;1[$ *et* $]2;+\infty[$ *(on pourra utiliser un tableau de signes).*
3. a) *Montrer que l'équation* $x^3 - 3x - 3 = 0$ *admet une solution unique* α *dans l'intervalle* $[2;3]$.
   b) *Donner un encadrement de* α *d'amplitude égale à* 10^{-1}.
4. *On considère l'équation* $x = \cos(x)$.
   a) *Montrer que toute solution appartient nécessairement à l'intervalle* $[0;1]$.
   b) *Montrer l'existence et l'unicité de la solution.*
   c) *En donner des valeurs approchées par défaut et par excès à* 10^{-1} *près, puis à* 10^{-2} *près.*
5. **I)** *Soit la fonction* $P(x) = x^3 + x + 1$.
   a) *Montrer qu'il existe un unique réel* α *tel que* $P(\alpha) = 0$ *; et que* $\alpha \in]-1;0[$.
   b) *Donner un encadrement de* α *d'amplitude* 10^{-1}.

   II) *Soit la fonction* $f(x) = 6x^5 + 10x^3 + 15x^2 - 30$.
   a) *Calculer* $f'(x)$ *; puis étudier son signe en fonction de* α.
   b) *Dresser le tableau de variation de f.*
6. **I)** *Soit la fonction* $g(x) = x^3 + 3x - 2$.
   a) *Montrer qu'il existe un unique réel α tel que* $g(\alpha) = 0$*; et que :* $\alpha \in \left]\frac{1}{2};1\right[$.
   b) *Donner un encadrement de* α *d'amplitude* 10^{-1}.

   II) *Soit la fonction* $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+1}$.
   a) *Préciser* D_f *. Calculer* $f'(x)$ *et dresser le tableau de variation de f (On utilisera les résultats de la partie I). 1*
   b) *Etudier les branches infinies de la courbe de f en* $+\infty$ *et en* $-\infty$ *ainsi que la position relative de cette courbe et des asymptotes.(on pourra écrire* $\frac{x^3+1}{x^2+1} = ax + b - \frac{x(x-1)}{x^2+1}$*).*
   c) *Tracer la courbe de f dans un repère orthonormé.*

Exercices supplémentaires

7. a) Montrer que la fonction $P(x)=2x^3-3x^2-1$ s'annule une seule fois sur $\mathbb{R}$, en α.

   Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

   b) Faire une étude complète de la fonction $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x^3}$.

8. Soit la fonction $f(x)=x\sin x+\cos x$.

   a) Calculer $f'(x)$; puis dresser le tableau de variation de f sur $[0;2\pi]$.

   b) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $\left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

   c) Montrer que $\dfrac{5\pi}{6}<\alpha<\pi$.

9. I) Soit $P(x)=-x^3+3x-6$.

   a) Montrer que l'équation $P(x)=0$ admet dans l'intervalle $]-\infty;-1]$ une solution unique α

   b) Montrer que $-3<\alpha<-2$, puis donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1} .

   c) Dresser le tableau de variation de P.

   d) En déduire que α est l'unique racine réelle de P.

II) Soit la fonction $f(x)=\dfrac{3-x^3}{x^2-1}$.

a) Déterminer D_f le domaine de définition de f ainsi que les limites de f aux bornes de D_f .

b) Calculer la dérivée de f, étudier son signe. Dresser le tableau de variation de f.

c) Montrer que pour tout $x\in D_f$ on a : $f(x)=-x-\dfrac{x-3}{x^2-1}$

d) Déterminer les asymptotes à f en $+\infty$ et en $-\infty$, étudier la position relative de la courbe de f et deux de ces asymptotes (on pourra utiliser $f(x)=-x-\dfrac{x-3}{x^2-1}$).

d) Tracer la courbe de f dans un repère orthonormé.