Exercice 1

Calcul de primitives

a. $f(x)=\dfrac{x+1}{\left(x^2+2x\right)^3}$; *sur* $]1\,;+\infty[$

Correction :

$$f(x)=\frac{x+1}{\left(x^2+2x\right)^3}=\frac{1}{2}\times\left(x^2+2x\right)'\left(x^2+2x\right)^{-3}$$

Donc si F est une primitive de f elle est de la forme :

$$F(x)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{-3+1}\left(x^2+2x\right)^{-3+1}+C=\frac{-1}{4\left(x^2+2x\right)^2}+C$$

Où C est une constante réelle.

b. $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$; *sur* $]1\,;+\infty[$.

Correction :

$$f(x)=\frac{x}{x^2-1}=\frac{1}{2}\times\frac{\left(x^2-1\right)'}{x^2-1}$$

Donc si F est une primitive de f elle est de la forme : $F(x)=\dfrac{1}{2}\times\ln\left|x^2-1\right|+C$

Est comme $x^2-1>0$ *sur* $]1\,;+\infty[$ *alors :* $F(x)=\ln\sqrt{x^2-1}+C$

Où C est une constante réelle.

c. $f(x)=x-1+\dfrac{\ln x}{x}$ *sur* IR_+^* .

Correction :

$$f(x)=x-1+\frac{\ln x}{x}=\left(\frac{x^2}{2}\right)'-(x)'+(\ln x)'\times(\ln x)$$

Donc si F est une primitive de f sur IR_+^* *elle est de la forme :* $F(x)=\dfrac{x^2}{2}-x+\dfrac{1}{2}\times\ln^2 x+C$

Où C est une constante réelle.

Exercice 2

Soit la fonction f, définie par $f(x)=\left(\sin^2 x-3\sin x+8\right)\cos x$. *Déterminer sur* $\mathbb{R}$ *la primitive F de f telle que :* $F\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=0$.

Correction

$$f(x)=\left(\sin^2 x-3\sin x+8\right)\cos x$$
$$=\cos x\ \sin^2 x-3\cos x\ \sin x+8\cos x$$
$$=\left(\frac{1}{3}\ \sin^3 x\right)'-\left(\frac{3}{2}\ \sin^2 x\right)'+\left(8\sin x\right)'+C$$

Donc une primitive de f sur IR est : $F(x)=\frac{1}{3}\ \sin^3 x-\frac{3}{2}\ \sin^2 x+8\sin x+C$ *; de plus F satisfait la condition* $F\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0$

D'où : $\frac{1}{3}\ \sin^3\frac{3\pi}{4}-\frac{3}{2}\ \sin^2\frac{3\pi}{4}+8\sin\frac{3\pi}{4}+C=0$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3-\frac{3}{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+8\frac{\sqrt{2}}{2}+C=0$$
$$\Rightarrow C=\frac{57-\sqrt{2}}{12}$$

Alors : $F(x)=\frac{1}{3}\ \sin^3 x-\frac{3}{2}\ \sin^2 x+8\sin x+\frac{57-\sqrt{2}}{12}$

Exercice 3

1. Montrer que pour tout $x\in IR$: $x^3+5x^2+7x+4=(x+3)\left(x^2+2x+1\right)+1$.

2. En déduire une primitive de la fonction f définie par : $f(x)=\frac{x^3+5x^2+7x+4}{x^2+2x+1}$ *sur* $]-\infty;-1[$.

Correction

1. pour tout $x\in IR$: $(x+3)\left(x^2+2x+1\right)+1=x^3+2x^2+x+3x^2+6x+3+1$
$$=x^3+5x^2+7x+4.$$

2. $f(x)=\frac{x^3+5x^2+7x+4}{x^2+2x+1}$
$$=\frac{(x+3)\left(x^2+2x+1\right)+1}{x^2+2x+1}$$
$$=(x+3)+\frac{1}{(x+1)^2}$$
$$=\left(\frac{x^2}{2}+3x\right)'+(x+1)'(x+1)^{-2}$$

D'où une primitive de f sur $]-\infty;-1[$ *est* $\mathrm{F}(x)=\frac{x^2}{2}+3x+\frac{1}{-2+1}(x+1)^{-2+1}$
$$=\frac{x^2}{2}+3x-\frac{1}{x+1}+C$$

où C est une constante réelle.

Exercice 4

Fonction rationnelle

1. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ *par :* $g(x)=\dfrac{1}{x(x^2-1)}$.

a. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que l'on ait, pour tout $x>1$: $g(x)=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x+1}+\dfrac{c}{x-1}$.

b. Trouver une primitive G de g sur l'intervalle $]1;+\infty[$.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ *par :* $f(x)=\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}$.

Trouver une primitive F de f sur l'intervalle $]1;+\infty[$.

3. En utilisant les résultats obtenus précédemment, calculer : $I=\int_2^3 \dfrac{2x}{(x^2-1)}\ln x\,dx$.

On donnera le résultat sous la forme $p\ln2+q\ln3$ *avec p et q rationnels.*

Correction

1. a.
$$\begin{aligned} g(x)&=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-1}\\ &=\frac{a(x+1)(x-1)+bx(x-1)+cx(x+1)}{x(x-1)(x+1)}\\ &=\frac{ax^2-a+bx^2-bx+cx^2+cx}{x(x-1)(x+1)}\\ &=\frac{(a+b+c)x^2+(c-b)x-a}{x(x^2-1)}\end{aligned}$$

d'où on tire par identification : $\begin{cases}a+b+c=0\\c-b=0\\-a=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b+c=1\\c-b=0\\a=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=\dfrac{1}{2}\\c=\dfrac{1}{2}\\a=-1\end{cases}$. *On a donc : pour tout* $x>1$:

$$g(x)=-\frac{1}{x}+\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{2(x-1)}..$$

b. pour tout $x>1$ *; on a :*

$$g(x)=-\frac{1}{x}+\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{2(x-1)}=-(\ln x)'+\frac{1}{2}(\ln(x+1))'+\frac{1}{2}(\ln(x-1))'$$

D'où une primitive de g sur $]1;+\infty[$ *est :* $G(x)=-\ln|x|+\dfrac{1}{2}\ln|x+1|+\dfrac{1}{2}\ln|x-1|$

(ne pas oublier les valeurs absolues au départ, on les supprime par la suite car on est sur $]1;+\infty[$ *).*

Comme $x>1$ *alors :* $G(x)=-\ln x+\dfrac{1}{2}\ln(x+1)+\dfrac{1}{2}\ln(x-1)$.

2. Pour trouver une primitive de $f(x)=\dfrac{2x}{\left(x^2-1\right)^2}$, il suffit d'écrire f sous la forme suivante :

$f(x)=\left(x^2-1\right)'\left(x^2-1\right)^{-2}$ D'où une primitive de f sur l'intervalle $]1;+\infty[$ est :

$F(x)=\dfrac{1}{-2+1}\left(x^2-1\right)^{-2+1}=-\dfrac{1}{\left(x^2-1\right)}$.

3. il faut intégrer par parties : on pose : $\begin{cases} u(x)=\ln x & \Rightarrow u'(x)=\dfrac{1}{x} \\ v'(x)=\dfrac{2x}{\left(x^2-1\right)^2} & \Rightarrow v(x)=\dfrac{-1}{x^2-1} \end{cases}$, ce qui donne :

$$\int_2^3 \frac{2x}{\left(x^2-1\right)^2}\ln x\,dx=\left[\frac{1}{x^2-1}\ln x\right]_2^3-\int_2^3\frac{-1}{x^2-1}\times\frac{1}{x}\,dx$$

$$=\frac{-1}{3^2-1}\ln 3-\frac{-1}{2^2-1}\ln 2+\int_2^3\frac{1}{x\left(x^2-1\right)}\,dx$$

$$=-\frac{1}{8}\ln 3+\frac{1}{3}\ln 2+\left[-\ln x+\frac{1}{2}\ln(x+1)+\frac{1}{2}\ln(x-1)\right]_2^3$$

$$=-\frac{1}{8}\ln 3+\frac{1}{3}\ln 2-\ln 3+\frac{1}{2}\ln(3+1)+\frac{1}{2}\ln(3-1)+\ln 2-\frac{1}{2}\ln(2+1)-\frac{1}{2}\ln(2-1)$$

$$=-\frac{1}{8}\ln 3+\frac{1}{3}\ln 2-\ln 3+\frac{1}{2}\ln 4+\frac{1}{2}\ln 2+\ln 2-\frac{1}{2}\ln 3-\cancel{\frac{1}{2}\ln(1)}$$

$$=-\left(\frac{1}{8}+1+\frac{1}{2}\right)\ln 3+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1+1\right)\ln 2=-\frac{13}{8}\ln 3+\frac{17}{6}\ln 2$$

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=1+x\ln x$. On note $\left(C_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$. Toutes les aires considérées dans ce problème seront exprimées en unités d'aire.

Partie A

Le but de cette partie est de déterminer un encadrement de l'aire A du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\left(C_f\right)$ et les deux droites d'équations $x=1$ et $x=2$. On note M et N les points de $\left(C_f\right)$ d'abscisses respectives 1 et 2, P et Q leurs projetés orthogonaux respectifs sur l'axe des abscisses. La figure est donnée plus bas.

1. a. Montrer que f est positive sur $[1;2]$.

b. Montrer que le coefficient directeur de la droite (MN) est $2\ln 2$.

c. Soit E le point d'abscisse $4e$.

Montrer que sur l'intervalle $[1;2]$, le point E est l'unique point de $\left(C_f\right)$ en lequel la tangente à $\left(C_f\right)$ est parallèle à (MN).

d. On appelle (T) la tangente à $\left(C_f\right)$ au point E. montrer qu'une équation de (T) est :

$y=(2\ln 2)x-\dfrac{4}{e}+1$.

2. Soit g la fonction définie sur $[1;2]$ par : $g(x)=f(x)-\left[(2\ln 2)x-\frac{4}{e}+1\right]$.

a. Montrer que : $g'(x)=1+\ln\left(\frac{x}{4}\right)$ pour tout x de $[1;2]$.

b. Etudier les variations de g sur $[1;2]$ et en déduire la position relative de (C_f) et de (T) sur cet intervalle.

3. Soient M' et N' les points d'abscisses respectives 1 et 2 de la droite (T). On admet que la courbe (C_f) reste sous la droite (MN) sur l'intervalle $[1;2]$ et que les points M' et N' ont des ordonnées strictement positives.

a. Calculer les aires des trapèzes MNQP et M'N'QP.

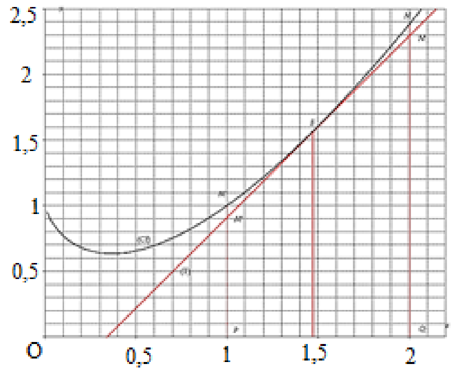
b. En déduire, à l'aide de la calculatrice, un encadrement de A d'amplitude 10^{-1} .

Partie B

Le but de cette partie est de déterminer la valeur exacte de A.

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_1^2 x\ln x dx$.

2. En déduire la valeur exacte de A.



Correction

Partie A

1. a. $\ln x>0$ sur $[1;2]$ donc f est positive sur $[1;2]$.

b. M a pour coordonnées $(1;1)$, $N\,N(2;1+2\ln 2)$; le coefficient directeur de la droite (MN) est :

$$\frac{y_M-y_N}{x_M-x_N}=\frac{1-1-2\ln 2}{1-2}=2\ln 2.$$

c. Pour tout $x\in\left]0\,;+\infty\right[$ la dérivée de f est : $f'(x)=\ln x+x\times\frac{1}{x}=\ln x+1$; la tangente à (C_f) est parallèle à (MN) pour x vérifiant : $\ln x+1=2\ln 2 \Leftrightarrow \ln x+1=2\ln 2$

$$\Leftrightarrow \ln x=-1+2\ln 2$$

$$\Leftrightarrow x=e^{-1+2\ln 2}$$

$$\Leftrightarrow x=e^{-1}\times e^{2\ln 2} \quad .$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{4}{e}$$

d. $y=2\ln 2\left(x-\frac{4}{e}\right)+1+\frac{4}{e}\ln\left(\frac{4}{e}\right)$

$$= (2\ln 2)x - \cancel{2\ln 2 \times \frac{4}{e}} + 1 + \cancel{\frac{4}{e}\ln 4} - \frac{4}{e}.$$

$$= (2\ln 2)x - +1 - \frac{4}{e}$$

2. Soit g la fonction définie sur $[1;2]$ *par :* $g(x) = f(x) - \left[(2\ln 2)x - \frac{4}{e} + 1\right]$

a. $g'(x) = f'(x) - (2\ln 2) = 1 + \ln x - \ln 4 = 1 + \ln \frac{x}{4}$

b. $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 + \ln \frac{x}{4} \geq 0$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{x}{4} \geq -1$$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{x}{4} \geq \ln \frac{1}{e}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{4} \geq \frac{1}{e}$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{4}{e}$$

D'où le tableau de variation de g sur $[1;2]$.

x	1	$\frac{4}{e}$	2
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$g(1)$ ↘	0	↗ $g(2)$

$g\left(\frac{4}{e}\right) = 0$; $g(1) = 2\ln 2 - \frac{4}{e} + 1 > 0$

Et $g(2) = \cancel{1} + 2\ln 2 + 2(2\ln 2) + \frac{4}{e} \cancel{-1}$

$= 2\ln 2 + \frac{4}{e} > 0$

le 0 est un minimum pour g sur $[1;2]$*; conclusion* $g(x) \geq 0$ *et* (C_f) *est au-dessus de (T).*

3. a. Déterminons les ordonnées de M' *et* N'*:* $y_{M'} = (2\ln 2) + 1 - \frac{4}{e}$ *et* $y_{N'} = (4\ln 2) + 1 - \frac{4}{e}$.

Aire de MNQP : $\frac{(PM + QN)}{2} \times PQ = \frac{(y_M + y_N)}{2} \times 1 = 1 + \ln 2 \simeq 1,693$;

aire de M'N'QP : $\frac{(PM' + QN')}{2} \times PQ = \frac{(y_{M'} + y_{N'})}{2} \times 1 = 3\ln 2 + 1 - \frac{4}{e} \simeq 1,608$

b. L'aire A est comprise entre les deux valeurs $1,608$ et $1,693$ *à* 10^{-1} *près.*

Partie B

1. On pose : $\begin{cases} u(x) = \ln x \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = x \quad \Rightarrow v(x) = \frac{x^2}{2} \end{cases}$

d'où : $\int_1^2 x \ln x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x} dx$

$$= 2\ln 2 - \frac{1}{2}\int_1^2 x dx$$

$$= 2\ln 2 - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 .$$

$$= 2\ln 2 - \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= 2\ln 2 - \frac{3}{4} \simeq 0,636$$

2. $A = \int_1^2 f(x) dx$

$$= \int_1^2 1 dx + \int_1^2 x \ln x dx$$

$$= 1 + 2\ln 2 - \frac{3}{4} \simeq 1,636$$