

①

Correction Bar Blanc N°472^{ème} Bac P.C.S.TExercice 1

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+6u_n} \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

1) a) Montrons par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \geq \frac{1}{3}$.

Initialisation

Pour $n=0$, on a: $u_0 = 1$ donc: $u_0 \geq \frac{1}{3}$.

Hérédité

Pour $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n \geq \frac{1}{3}$ et montrons que: $u_{n+1} \geq \frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned} \text{On a: } u_{n+1} - \frac{1}{3} &= \frac{3u_n}{1+6u_n} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{9u_n - 1 - 6u_n}{3(1+6u_n)} \\ &= \frac{3u_n - 1}{3(1+6u_n)} \\ &= \frac{(u_n - \frac{1}{3})}{(1+6u_n)} \end{aligned}$$

et d'après l'hypothèse de récurrence
on a: $u_n \geq \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} u_n - \frac{1}{3} \geq 0 \\ 1+6u_n > 0 \end{cases}$

$$\text{Donc } u_{n+1} - \frac{1}{3} \geq 0 \Rightarrow u_{n+1} \geq \frac{1}{3}$$

Conclusion

On a montré par récurrence que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \geq \frac{1}{3}.$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{3u_n}{1+6u_n} - u_n \\ &= \frac{3u_n - u_n - 6u_n^2}{1+6u_n} \\ &= \frac{2u_n - 6u_n^2}{1+6u_n} \\ &= \frac{2u_n(1-3u_n)}{1+6u_n}. \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n(1-3u_n)}{1+6u_n}.$$

D'après la question précédente on a :

$$u_n \geq \frac{1}{3} \Rightarrow 1 - 3u_n \leq 0 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{D'où : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} - u_n \leq 0.$$

par suite (u_n) est décroissante ; et comme elle est minorée par $\frac{1}{3}$ alors (u_n) est convergente.

2) On pose : $v_n = \frac{1}{u_n} - 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a :

(2)

$$V_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} - 3$$

$$= \frac{1}{\frac{1+6u_n}{3u_n}} - 3$$

$$= \frac{1+6u_n}{3u_n} - 3$$

$$= \frac{1+6u_n-9u_n}{3u_n}$$

$$= \frac{1-3u_n}{3u_n}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{u_n} - 1$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{u_n} - 3 \right)$$

$$= \frac{1}{3} V_n$$

D'où: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; V_{n+1} = \frac{1}{3} V_n$

Donc (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de 1^{er} terme: $V_0 = -2$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a:

$$V_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \times (-2)$$

$$\text{donc: } (\forall n \in \mathbb{N}) ; V_n = -2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

et Pour tout $n \in \mathbb{N}$;

$$v_n = \frac{1}{u_n} - 3 \Rightarrow \frac{1}{u_n} = v_n + 3$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{1}{3 + v_n}$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{1}{3 - 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

$$\text{Donc : (théorème) ; } u_n = \frac{1}{3 - 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

$$c) \text{ Comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0 \text{ (car } -1 < \frac{1}{3} < 1)$$

$$\text{alors } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{3}}$$

Exercice 2

$$1) (E): z^2 + 2z + 4 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4 \times 4 = -12$$

Donc (E) admet deux solutions complexes.

$$\begin{array}{l|l} z_1 = \frac{-2 - i\sqrt{12}}{2} & z_2 = -1 + i\sqrt{3} \\ = \frac{-2 - 2i\sqrt{3}}{2} & \\ = -1 - i\sqrt{3} & S = \{-1 - i\sqrt{3}; -1 + i\sqrt{3}\} \end{array}$$

$$2) A(z_A = 2) ; B(z_B = -1 + i\sqrt{3}) \text{ et } C(z_C = -1 - i\sqrt{3}).$$

$$R_1(A; \frac{\pi}{2}) \text{ et } R_2(A; -\frac{\pi}{2}).$$

$$\textcircled{3} \quad \bullet) \text{ On a: } B'(z_{B'}) = R_2(B(z_B)) \Leftrightarrow AB' = AB \text{ et } (\overline{AB}; \overline{AB'}) = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow z_{B'} - z_A = (z_B - z_A) e^{i\pi/2}$$

$$\Leftrightarrow z_{B'} = -i(z_B - z_A) + z_A$$

$$\Leftrightarrow z_{B'} = -i(-1 + i\sqrt{3} - 2) + 2$$

$$\Leftrightarrow z_{B'} = -i(-3 + i\sqrt{3}) + 2$$

$$\Leftrightarrow z_{B'} = 2 + \sqrt{3} + 3i$$

$$\text{Donc: } \boxed{B'(z_{B'} = 2 + \sqrt{3} + 3i)}$$

$$\bullet) \text{ On a: } C'(z_{C'}) = R_1(C(z_C)) \Leftrightarrow AC' = AC \text{ et } (\overline{AC}; \overline{AC'}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow z_{C'} - z_A = (z_C - z_A) e^{i\pi/2}$$

$$\Leftrightarrow z_{C'} = i(z_C - z_A) + z_A$$

$$\Leftrightarrow z_{C'} = i(-1 - i\sqrt{3} - 2) + 2$$

$$\Leftrightarrow z_{C'} = i(-3 - i\sqrt{3}) + 2$$

$$\Leftrightarrow z_{C'} = 2 + \sqrt{3} - 3i$$

$$\Leftrightarrow z_{C'} = \overline{z_{B'}}$$

$$\text{Donc: } \boxed{z_{C'} = \overline{z_{B'}}}$$

$$3) \text{ I milieu de } [CB] \Leftrightarrow z_I = \frac{z_C + z_B}{2}$$

$$\Leftrightarrow z_I = \frac{-1 - i\sqrt{3} - 1 + i\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{z_I = -1}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet) J \text{ milieu de } [BB'] &\Leftrightarrow z_J = \frac{z_B + z_{B'}}{2} \\
 &\Leftrightarrow z_J = \frac{-1 + i\sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} + 3i}{2} \\
 &\Leftrightarrow z_J = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + i \frac{(3 + \sqrt{3})}{2} \\
 &\Leftrightarrow z_J = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + i\sqrt{3} \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right) \\
 &\Leftrightarrow \boxed{z_J = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} (1 + i\sqrt{3})}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet) K \text{ milieu de } [B'C'] &\Leftrightarrow z_K = \frac{z_B + z_{C'}}{2} \\
 &\Leftrightarrow z_K = \frac{2 \operatorname{Re}(z_B)}{2} \\
 &\Leftrightarrow z_K = \operatorname{Re}(z_B) \\
 &\Leftrightarrow \boxed{z_K = 2 + \sqrt{3}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet) L \text{ milieu de } [C'C] &\Leftrightarrow z_L = \frac{z_{C'} + z_C}{2} \\
 &\Leftrightarrow z_L = \frac{2 + \sqrt{3} - 3i - 1 - i\sqrt{3}}{2} \\
 &\Leftrightarrow z_L = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} - i\sqrt{3} \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right) \\
 &\Leftrightarrow \boxed{z_L = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} (1 - i\sqrt{3})}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) \text{ On a: } \bullet) 1 + z_J &= 1 + \frac{1 + \sqrt{3}}{2} (1 + i\sqrt{3}) \\
 &= 1 + \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right) \times i\sqrt{3} \\
 &= \frac{3 + \sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right) i\sqrt{3} \\
 &= \frac{3 + \sqrt{3}}{2} + i \left(\frac{\sqrt{3} + 3}{2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\boxed{1 + z_J = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} (1 + i)}$$

(4)

$$\begin{aligned}
 \bullet) \quad i(1+z_L) &= i \left(1 + \frac{1+\sqrt{3}}{2} (1-i\sqrt{3}) \right) \\
 &= i \left(\frac{3+\sqrt{3}}{2} - i\sqrt{3} \times \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2} \right) \right) \\
 &= i \left(\frac{3+\sqrt{3}}{2} - i \times \frac{\sqrt{3}+3}{2} \right) \\
 &= \frac{3+\sqrt{3}}{2} i + \frac{3+\sqrt{3}}{2} \\
 &= \frac{3+\sqrt{3}}{2} (1+i) \\
 &= 1+z_J.
 \end{aligned}$$

Donc on a: $1+z_J = i(1+z_L)$.

$$\bullet) \quad \text{On a: } 1+z_J = i(1+z_L) \quad \text{et } z_I = -1.$$

$$\Rightarrow z_J - z_I = i(z_L - z_I)$$

$$\Rightarrow \frac{z_J - z_I}{z_L - z_I} = i$$

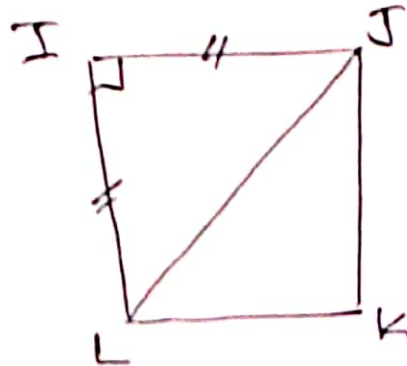
$$\Rightarrow \begin{cases} \left| \frac{z_J - z_I}{z_L - z_I} \right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_J - z_I}{z_L - z_I}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z_J - z_I| = |z_L - z_I| \\ (\overrightarrow{IL}; \overrightarrow{IJ}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} IJ = IL \\ (\overrightarrow{IL}; \overrightarrow{IJ}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

Donc le triangle IJL est isocèle rectangle en I.

5) on a montré que IJL est rectangle-isocèle en I ; Donc le quadrilatère IJKL est un carré car il a deux côtés qui se suivent forme un angle droit et ils sont égaux



Exercice 3

Partie I

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; g(x) = -\frac{1}{4} x e^{-\frac{x}{2}} + 1.$$

1) a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{4} x e^{-\frac{x}{2}} + 1.$

on pose : $t = -\frac{x}{2}$ quand $x \rightarrow -\infty$ alors $t \rightarrow +\infty$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{4} x e^{-\frac{x}{2}} + 1 \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t e^t}{2} + 1.$$

$$= +\infty.$$

$$(\text{Car } \lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty)$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty}$$

b) On pose : $t = -\frac{x}{2}$ quand : $x \rightarrow +\infty$ alors $t \rightarrow -\infty$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} x e^{-\frac{x}{2}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} -t e^t = 0.$$

$$(\text{Car } \lim_{t \rightarrow -\infty} t e^t = 0)$$

⑤

$$\begin{aligned} \text{On a: } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{4} x e^{-\frac{x}{2}} + 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} x e^{-\frac{x}{2}} \right) + 1 \right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

$$\left(\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} x e^{-\frac{x}{2}} = 0 \right)$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1}$$

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$; on a:

$$g'(x) = \left(-\frac{1}{4} x e^{-\frac{x}{2}} + 1 \right)'$$

$$= -\frac{1}{4} e^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{8} x e^{-\frac{x}{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{8} x - \frac{1}{4} \right) e^{-\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1}{8} (x - 2) e^{-\frac{x}{2}}$$

$$\text{Donc: } \boxed{(\forall x \in \mathbb{R}) ; g'(x) = \frac{1}{8} (x - 2) e^{-\frac{x}{2}}}$$

) $g'(x)$ est du même signe que $(x - 2)$ car
 $(\forall x \in \mathbb{R}) ; e^{-\frac{x}{2}} > 0$; d'où:

Tableau de variations de g .

	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	$g(2)$	1

$$g(2) = 1 - \frac{1}{2e} > 0$$

3) D'après le tableau de variation $g(2)$ est une valeur minimale absolue pour g ; donc:

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; g(x) \geq g(2) \text{ et } g(2) > 0.$$

$$\text{Donc: } \boxed{(\forall x \in \mathbb{R}) ; g(x) > 0}$$

Partie II

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) = \left(\frac{1}{2}x + 1\right)e^{-\frac{x}{2}} + x.$$

$$1) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2}x + 1\right)e^{-\frac{x}{2}} + x.$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}xe^{-\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} + x.$$

On pose $t = -\frac{x}{2}$; $x \rightarrow -\infty$ alors $t \rightarrow +\infty$.

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (-te^t + e^t - 2t)$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} ((1-t)e^t - 2t)$$

$$= -\infty.$$

$$(\text{Car: } \lim_{t \rightarrow +\infty} (1-t) = -\infty ; \lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty)$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}x + 1\right)e^{-\frac{x}{2}} + x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}xe^{-\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} + x\right)$$

$$= +\infty.$$

$$(\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}xe^{-\frac{x}{2}} = 0 \text{ (d'après ce qui précède)})$$

(6)

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$$

$$\begin{aligned} \text{g) a) On a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}x+1\right)e^{-\frac{x}{2}} + x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x}\right)e^{-\frac{x}{2}} + 1 \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

$$\left(\text{Car } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-\frac{x}{2}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty \right.$$

en posant $t = -\frac{x}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$)

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty}$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

Donc (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$.

$$\begin{aligned} \text{b) On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{1}{2}x+1\right)e^{-\frac{x}{2}} + x - x \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}x+1\right)e^{-\frac{x}{2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}x e^{-\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} \end{aligned}$$

$$\text{On pose : } t = -\frac{x}{2} ; x \rightarrow +\infty \text{ alors } t \rightarrow -\infty.$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{2} e^{-\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} \right) = \lim_{t \rightarrow -\infty} (t e^t + e^t) = 0$$

$$\left(\text{Car } \lim_{t \rightarrow -\infty} t e^t = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0 \right)$$

$$\text{Donc : } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = 0}$$

Par suite (C_f) admet la droite $(\Delta): y=x$ comme asymptote oblique au voisinage de $+\infty$

c) Étudions le signe de $f(x)-x$.

$$\text{On a: } f(x)-x = \left(\frac{1}{2}x+1\right)e^{-\frac{x}{2}}$$

Donc $f(x)-x$ est du signe de $\left(\frac{1}{2}x+1\right)$

D'où:

•) $f(x)-x \geq 0$ sur $[-2; +\infty[$; donc (C_f) est au-dessus de (Δ) sur $[-2; +\infty[$.

•) $f(x)-x \leq 0$ sur $]-\infty; -2]$; donc (C_f) est au-dessous de (Δ) sur $]-\infty; -2]$.

3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$; on a:

$$f'(x) = \left(\left(\frac{1}{2}x+1 \right) e^{-\frac{x}{2}} + x \right)'$$

$$= \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x+1\right)e^{-\frac{x}{2}} + 1$$

$$= e^{-\frac{x}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} \right) + 1$$

$$= -\frac{1}{4}xe^{-\frac{x}{2}} + 1.$$

Donc: $\boxed{(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = g(x)}$

D'après la partie I; $g(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$; par suite f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variations de f .

(7)

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

4) L'équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse $x_0 = 0$ est :

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0) \quad \text{et} \quad \begin{cases} f'(0) = g(0) = 1 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

$$= x + 1.$$

Donc $(T): y = x + 1$

- 5) 1) f est continue sur $\mathbb{R}$
 2) f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
 3) $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et $0 \in \mathbb{R}$

Donc d'après le TVI l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

On a : 1) $f(-1) = \left(-\frac{1}{2} + 1\right)e^{\frac{1}{2}} - 1$
 $= \frac{1}{2}\sqrt{e} - 1 < 0.$

2) $f(0) = 1$

Donc $f(-1) < 0 < f(0)$ et $f(\alpha) = 0$

$\Rightarrow f(-1) < f(\alpha) < f(0)$

$\Rightarrow \boxed{-1 < \alpha < 0}$

(Car f est strictement croissante)

b) On a: $f'(x) = g(x)$; pour tout $x \in \mathbb{R}$

donc $(\forall x \in \mathbb{R}); f''(x) = g'(x)$

et d'après la partie I:

$$1) g'(x) \leq 0 \text{ sur }]-\infty; 2] \Rightarrow f''(x) \leq 0 \text{ sur }]-\infty; 2].$$

$$2) g'(x) \geq 0 \text{ sur } [2; +\infty[\Rightarrow f''(x) \geq 0 \text{ sur } [2; +\infty[.$$

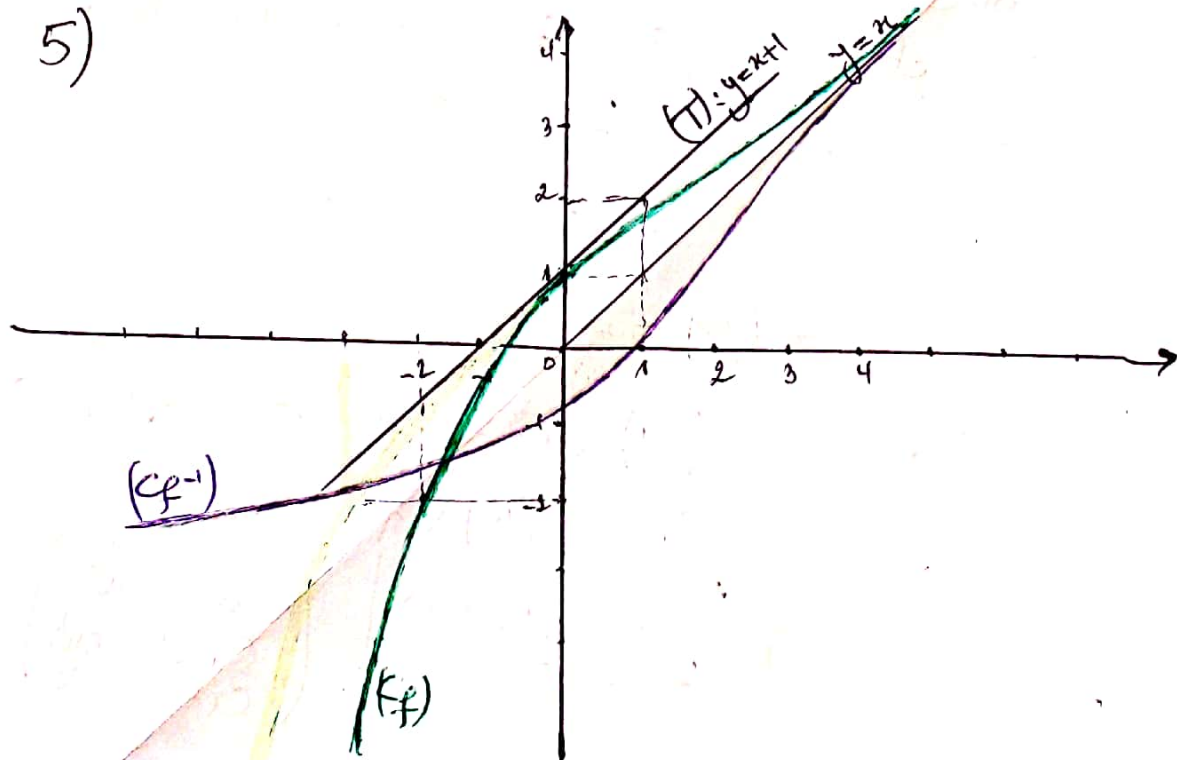
Parsuite; (C_f) est convexe sur $[2; +\infty[$ et concave sur $]-\infty; 2]$.

$$\text{De plus } f''(x) = 0 \Leftrightarrow g'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

Donc $f''(x)$ s'annule en 2 en changeant de signe alors le point $(2; f(2))$ est un point d'inflexion pour (C_f) .
 $(f(2) = 2(1 + \frac{1}{2}))$.

5)



⑧ 6) a) Calculons $\int_0^2 x e^{-\frac{x}{2}} dx = \frac{4(e-2)}{e}$.

On pose : $\begin{cases} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^{-\frac{x}{2}} & v(x) = -2e^{-\frac{x}{2}} \end{cases}$

Donc :
$$\begin{aligned} \int_0^2 x e^{-\frac{x}{2}} dx &= \left[-2x e^{-\frac{x}{2}} \right]_0^2 - \int_0^2 (-2e^{-\frac{x}{2}}) dx \\ &= -4e^{-1} + 2 \int_0^2 e^{-\frac{x}{2}} dx \\ &= -4e^{-1} + 2 \left[-2e^{-\frac{x}{2}} \right]_0^2 \\ &= -\frac{4}{e} + 2(-2e^{-1} + 2) \\ &= -\frac{4}{e} - \frac{4}{e} + 4 \\ &= \frac{4(e-2)}{e} \end{aligned}$$

Donc : $\boxed{\int_0^2 x e^{-\frac{x}{2}} dx = \frac{4(e-1)}{e}}$

b) Soit S la surface demandée ; on a :

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 |f(x) - x| dx \\ &= \int_0^2 (f(x) - x) dx \quad (\text{car } f(x) > x; \forall x \in \mathbb{R}) \\ &= \int_0^2 \left(\frac{1}{2}x + 1 \right) e^{-\frac{x}{2}} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 x e^{-\frac{x}{2}} dx + \int_0^2 e^{-\frac{x}{2}} dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{4(e-2)}{e} \right) + \left[-2e^{-\frac{x}{2}} \right]_0^2 \end{aligned}$$

$$= \frac{2(e-2)}{e} + (-2e^{-1} + 2)$$

$$= 2 - \frac{4}{e} - \frac{2}{e} + 2$$

$$= 4 - \frac{2}{e}$$

$$= \frac{2(2e-1)}{e}$$

Donc: $\boxed{S = \frac{2(2e-1)}{e} \text{ (u.a.)}}$

8) a) f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$
donc elle admet une fonction réciproque f^{-1}
définie sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

b) Voir graphique question 5).

c) D'après la question 2)c) on a:

$\forall x \in [-2; +\infty[; f(x) \geq x$ et comme f admet
une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$
et de même monotonie (càd strictement croissante)

alors: $\forall x \in [-2; +\infty[; f^{-1}(f(x)) \geq f^{-1}(x)$

$$\Rightarrow \boxed{\forall x \in [-2; +\infty[; f^{-1}(x) \leq x}$$

Partie III

$$(u_n): \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f^{-1}(u_n) \end{cases}; (\forall n \in \mathbb{N})$$

1) Montrons par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}); -2 \leq u_n \leq 0$

Initialisation

Pour $n=0$; on a: $u_0 = 0$ donc $-2 \leq u_0 \leq 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons que $-2 \leq u_n \leq 0$ et montrons que : $-2 \leq u_{n+1} \leq 0$

D'après Hypothèse de Récurrence ; on a :

$$-2 \leq u_n \leq 0 \Rightarrow f^{-1}(-2) \leq f^{-1}(u_n) \leq f^{-1}(0)$$

Car f^{-1} est strictement croissante.

$$\text{et } f(-2) = -2 \Rightarrow f^{-1}(-2) = -2$$

$$\Rightarrow -2 \leq u_{n+1} \leq f^{-1}(0) \leq 0.$$

$$\Rightarrow -2 \leq u_{n+1} \leq 0.$$

Conclusion

Par principe de récurrence on a :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; -2 \leq u_n \leq 0$$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a :

$$u_{n+1} - u_n = f^{-1}(u_n) - u_n \quad \text{et } u_n \in [-2; +\infty[.$$

alors $f^{-1}(u_n) \leq u_n$; donc :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} - u_n \leq 0$$

Par suite (u_n) est décroissante ; et comme elle est minorée par -2 alors (u_n) est convergente.

3) On a :

- 1) f est continue sur $[-2; 0]$.
- 2) $f([-2; 0]) \subset [-2; 0]$.
- 3) $u_0 \in [-2; 0]$.
- 4) $u_{n+1} = f^{-1}(u_n)$.
- 5) (u_n) est convergente.

donc si $l = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ alors l est solution
de l'équation $f'(u_n) = u_n \Leftrightarrow f(u_n) = u_n$.

Or d'après la partie II; l'équation $f(x) = x$
admet une solution qui est -2 ; donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -2}$$