Exercice 1

On considère la fonction numérique f telle que : $f(x)=(x^2-1)\arctan\frac{1}{2x-1}$, et on appelle (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f ?
2. Exprimer, sur $D\setminus\{0\}$, la dérivée de f sous la forme : $f'(x)=2xg(x)$

(où $g(x)=\arctan\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{2x}\times\frac{x^2-1}{2x^2-2x+1}$.

3. Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\,;2x^4-4x^3+9x^2-4x+1>0$ et en déduire le tableau de variation de g.
4. Dresser le tableau de variation de f .

Correction

1. f est définie et dérivable sur $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$

2. Pour tout $x\in D$, $f'(x)=\left((x^2-1)\arctan\frac{1}{2x-1}\right)'$

$$=2x\arctan\frac{1}{2x-1}+(x^2-1)\times\frac{\left(\frac{1}{2x-1}\right)'}{1+\left(\frac{1}{2x-1}\right)^2}$$

$$=2x\arctan\frac{1}{2x-1}+(x^2-1)\times\frac{-2}{(2x-1)^2}\times\frac{1}{1+\frac{1}{(2x-1)^2}}.$$

$$=2x\arctan\frac{1}{2x-1}+\frac{-2(x^2-1)}{1+(2x-1)^2}.$$

$$=2x\arctan\frac{1}{2x-1}+\frac{-2(x^2-1)}{4x^2-4x+2}.$$

$$=2x\arctan\frac{1}{2x-1}-\frac{x^2-1}{2x^2-2x+1}$$

$$=2x\left(\arctan\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{2x}\times\frac{x^2-1}{2x^2-2x+1}\right).$$

Par suite pour tout $x\in D$, $f'(x)=2xg(x)$; (où $g(x)=\arctan\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{2x}\times\frac{x^2-1}{2x^2-2x+1}$

3. Pour $x\in D\setminus\{0\}$, $g'(x)=\left(\arctan\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{2x}\times\frac{x^2-1}{2x^2-2x+1}\right)'$

$$=\frac{\frac{-2}{(2x-1)^2}}{1+\left(\frac{1}{2x-1}\right)^2}-\left(\frac{-2}{4x^2}\times\frac{x^2-1}{2x^2-2x+1}+\frac{1}{2x}\times\frac{2x(2x^2-2x+1)-(x^2-1)(4x-2)}{(2x^2-2x+1)^2}\right)$$

$$= \frac{-2}{(2x-1)^2+1} - \left(\frac{-1}{2x^2}\times\frac{x^2-1}{(2x^2-2x+1)} + \frac{1}{(2x^2-2x+1)} - \frac{4x^3-2x^2+4x+2}{(2x^2-2x+1)^2} \right)$$

$$= \frac{-1}{(2x^2-2x+1)} + \frac{1}{2x^2}\times\frac{x^2-1}{(2x^2-2x+1)} - \frac{1}{(2x^2-2x+1)} - \frac{4x^3-2x^2+4x+2}{2x(2x^2-2x+1)^2}$$

$$= \frac{-2x^2(2x^2-2x+1)}{2x^2(2x^2-2x+1)^2} + \frac{1}{2x^2}\times\frac{(x^2-1)(2x^2-2x+1)}{(2x^2-2x+1)^2} - \frac{2x^2(2x^2-2x+1)}{2x^2(2x^2-2x+1)^2} + \frac{x(4x^3-2x^2+4x+2)}{2x^2(2x^2-2x+1)^2}$$

$$= \frac{1}{2x^2(2x^2-2x+1)^2}\left(-2x^2(2x^2-2x+1)+(x^2-1)(2x^2-2x+1)-2x^2(2x^2-2x+1)+x(4x^3-2x^2+4x+2)\right)$$

$$= \frac{1}{2x^2(2x^2-2x+1)^2}\left(-4x^4+4x^3-2x^2+2x^4-2x^3+x^2-2x^2+2x-1-4x^4+4x^3-2x^2+4x^4-2x^3-4x^2+2x\right.$$

$$= \frac{-1}{2x^2(2x^2-2x+1)^2}\left(2x^4-4x^3+9x^2-4x+1\right)$$

Maintenant, $2x^4-4x^3+9x^2-4x+1 = 2x^2(x-1)^2+7x^2-4x+1$

$$= 2x^2(x-1)^2+5x^2+2x^2-4x+1.$$

$$= 2x^2(x-1)^2+5x^2+(2x-1)^2.$$

Donc : $g'(x) = \frac{-1}{2x^2(2x^2-2x+1)^2}\left(2x^4-4x^3+9x^2-4x+1\right) < 0$

D'où g est strictement décroissante sur $D\setminus\{0\}$.

Et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

Alors $g(x) > 0$ *sur* $D\setminus\{0\}$.

Tableau de variations de g

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	$\searrow$	0

Tableau de variations de f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{4}$	$\searrow$	$-\infty$

Exercice 2

Étudier la fonction f donnée par : $f(x) = \arctan\frac{x}{x+1} + \arctan\frac{x}{x-1} + \arctan(2x^2)$

Exercice 3:

A. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{-2\}$ par : $f(x)=\dfrac{1-x^2}{2+x}$

1. Pour tout x réel différent de -2 , trouver trois réels a, b ,c tels que : $f(x)=ax+b+\dfrac{2}{2+x}$

2. Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

3. Montrer que si (C) admet un centre de symétrie, déterminer son abscisse.

B. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(t)=\dfrac{1-\sin^2 t}{2+\sin t}$

1. Pour tout réel t , montrer que : $\varphi(\pi-t)=\varphi(t)$.

Expliquer comment l'étude des variations de φ sur $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ permet de construire la courbe représentative de φ.

2. a. On pose $a=\sqrt{3}-2$. Justifier l'existence et l'unicité de $t_0\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que : $\sin t_0=a$:

   b. En utilisant φ comme composée de fonctions, étudier ses variations sur $\left[-\dfrac{\pi}{2};t_0\right]$ puis sur $\left[t_0;\dfrac{\pi}{2}\right]$

   c. Soit φ' la dérivée de φ.
   Pour tout nombre réel t, prouver l'égalité : $\varphi'(t)=f'(\sin t)\times\cos t$.
   Retrouver alors les valeurs pour lesquelles φ' s'annule sur $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$

   d. Tracer la courbe représentative de φ sur $\left[-\dfrac{3\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$

Exercice 4:

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x+\cos^2(x)$
et C sa courbe représentative.

1. a) Démontrer que pour tout réel x, $x\le f(x)\le x+1$.
   b) En déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
   c) Interpréter graphiquement l'encadrement précédent.
2. On note (d_1) et (d_2) les droites d'équation $y=x$ et $y=x+1$.
Déterminer les points d'intersection de la courbe C avec la droite (d_1) ;puis avec la droite (d_2)
3. a) Montrer que pour tout réel x , $f'(x)=1-\sin(2x)$.
   b) En déduire le sens de variations de la fonction f.
   c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f'(x)=0$.
4. a) Dresser le tableau de variations de f sur $[0;\pi]$.
   b) Tracer (d_1) ; (d_2) et C la représentation graphique de f sur $[0;\pi]$.
5. a) Démontrer que pour tout réel x, $f(x+\pi)=f(x)+\pi$.

b) Comment déduit-on la courbe C de la représentation graphique de f sur $[0;\pi]$.

Eexercice 5:

Soient a et b deux nombres réels tels que : $a<b$; $ab>0$ et f une fonction continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$.

On définit sur $[a;b]$ la fonction : $F:t\mapsto\left(b^3-a^3\right)\left(f(t)-f(a)\right)-\left(f(b)-f(a)\right)\left(t^3-a^3\right)$

1) En appliquant le théorème de Rolle à la fonction F sur l'intervalle $[a;b]$ montrer que :

$$\left(\exists c\in]a;b[\right)/\ \frac{f(b)-f(a)}{b^3-a^3}=\frac{f'(c)}{3c^2}.$$

2) Soit $x>1$

a) En utilisant la question 1) montrer que : $\left(\exists c\in]\sqrt{x};x[\right)$;

$$\frac{\arctan(x)-\arctan\left(\sqrt{x}\right)}{x\sqrt{x}-1}=\frac{x\sqrt{x}}{3c^2\left(1+c^2\right)}$$

b) Déduire que : $\lim\limits_{x\to1^+}\left(\frac{\arctan(x)-\arctan\left(\sqrt{x}\right)}{x\sqrt{x}-1}\right)=\frac{1}{6}$

Eexercice 6:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=x^2\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)-1 & si\quad x<0 \\ f(x)=2x-\sqrt{x^2+x+1} & si\quad x\geq0 \end{cases}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) a) Montre que pour tout $x<0$, on a : $-1-x^2\leq f(x)\leq x^2-1$.

b) Déduire que f est continue en 0.

c) Calcule alors $\lim\limits_{x\to0}\cos\left(\frac{1-\cos x}{x}\right)$

d) Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$. Déduire que $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)$.

2) Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$; Interprète graphiquement le résultat obtenu.

3) Montre que l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution α dans l'intervalle $]-3;-2[$

4) a) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

b)Montre que la droite d'équation $y=x-\frac{1}{2}$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

Eexercice 7:

On considère la for f définie sur par: $\begin{cases} f(x)=\sqrt[3]{x-\arctan(x)} & si\quad x\geq0 \\ f(x)=x-1+\sqrt{x^2+1} & si\ x<0 \end{cases}$

1/Etudier la continuité de f en 0.

2/ Montrer que : $\left(\forall x\in \mathbb{R}^{+}\right)$; $\arctan(x)\le x$

3/ a- Montrer que : $\left(\forall x\in \mathbb{R}^{+}\right)$; $\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^5}{5}\le \arctan(x)\le \dfrac{x^3}{3}$

b-Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-\arctan(x)}{x^3}$

c- Etudier la dérivabilité de f en 0.

4/ Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

5/ a-Etudier les branches infinies de la courbe de f.

b-construire la courbe de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (on donne $\sqrt[3]{\dfrac{1}{3}}\simeq 0{,}7$)

6/soit g la restriction de f sur $\mathbb{R}_-^*$

a-Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}_-^*$ sur un intervalle J à déterminer ; puis déterminer l'expression de $g^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.

b-tracer la courbe de g^{-1}

7/ on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en définie par : $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\sqrt[3]{u_n-\arctan(u_n)} \quad (\forall n\in\mathbb{N}) \end{cases}$

a- Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

b- Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $0\le u_{n+1}\le \sqrt[3]{\dfrac{1}{3}}u_n$

c-En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

Eexercice 8:

Soit f une fonction dérivable sur $[a;b]$

Telle que : $f(a)=f(b)=0$; $f_d'(a)>0$ et $f_g'(b)<0$

1/ Montrer que : $\left(\exists x_1\in]a;b[\right)$ / $f(x_1)>0$ et $\left(\exists x_2\in]a;b[\right)$/ $f(x_2)<0$ (par absurde)

2/ En déduire qu'il existe des réels c_1 ; c_2 et c_3 de $]a;b[$ tels que : $f'(c_1)=f'(c_2)=f'(c_3)=0$ et $c_1<c_2<c_3$

Eexercice 9:

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=x+\dfrac{\pi}{2}+\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) & si\ \ x<0 \\ f(x)=\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+x & si\ \ x\ge 0 \end{cases}$

1/ Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2/ a-Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.

b-Etudier la dérivabilité de f à gauche en 0.(on pourra poser: $t=\dfrac{\pi}{2}+\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$