Série n ° 2 d'exercices sur les fonctions limites et continuité

Terminale S

EXERCICE 1

f et g sont les fonctions définies sur $]-2;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x^3-3x-6}{2(x+2)}$ et

$g(x)=\dfrac{1}{2}(x-1)^2$

1) Tracer dans une même fenêtre C_f et C_g sur $x\in[-8;8]$ et $y\in[-10;10]$.

Que peut-on dire de C_g par rapport à C_f en ∞ ? Pourquoi ?

2) a) Démontrer que pour tout $x>2$: $g(x)-f(x)=\dfrac{4}{x+2}$

b) En déduire la limite de $g(x)-f(x)$ en $+\infty$.

c) Étudier la position relative C_f et C_g.

3) On considère l'algorithme suivant en Python

a) Expliquer le rôle de la fonction $d(a)$.

b) Que retourne $d(0,01)$

```
def d(a)
    x=-1
    while 4/(x+2)>a :
        x+=1
    return x
```

EXERCICE 2

Fonction catastrophe f est la fonction définie sur R∗ par :

$f(x)=\dfrac{(x^{20}+100)^2-10000}{x^{20}}$

1) Tracer C_f sur $x\in[0;1,5]$ et $y\in[-50;600]$. unités $0,5$ sur (Ox) et 100 sur (Oy).

2) Qu'observe t-on sur le graphe ?

Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de f en 0 ?

3) a) En développant $\left(x^{20}+100\right)^2$, trouver une expression simplifiée de f(x).

b) Déterminer alors la limite de la fonction f en 0.

c) Comment expliquer le graphe de C_f de la calculatrice

EXERCICE 3

Par un encadrement judicieusement choisi, déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\cos(x)}{x+1}$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{2-\cos(x)}$ 3) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+x\sin x$

EXERCICE 4

1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x)=\sqrt{x+2}-\sqrt{x}$

a) En utilisant la quantité conjuguée, montrer que : $\forall x>0,\ 0\leq f(x)\leq \frac{1}{\sqrt{x}}$

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x)=\frac{E(x)+2}{x}$ où $E(x)$ est la partie entière de x.

a) Justifier que : $\forall x\in\mathbb{R},\ x-1\leq E(x)\leq x$.

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

EXERCICE 5

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$ par : $f(x)=\frac{2x+\sin x}{x-1}$

1) Déterminer les limites en $\pm\infty$ et en 1.

2) Déterminer les éventuelles asymptotes

EXERCICE 6

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x - 2 & si\ x \leq 1 \\ f(x) = \dfrac{x-4}{x} & si\,non \end{cases}$

1) a) Tracer la fonction f sur $x \in [-5;5]$ et $y \in [-5;5]$.

b) Que peut-on conjecturer quant à la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

2) Démonter cette conjecture en distinguant les cas $x \neq 1$ et $x = 1$.

EXERCICE 7

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = e^x & si\ x \leq 1 \\ f(x) = -x^2 + 2x + 1 & si\,non \end{cases}$

1) a) Tracer la fonction f sur $x \in [-5;5]$ et $y \in [-5;5]$.

b) Que peut-on conjecturer quant à la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

2) Démonter cette conjecture en distinguant les cas $x \neq 1$ et $x = 1$.