

Exercice1(07,5pts) :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \frac{1}{2 + \arctan x}$ et

(u_n) la suite numérique définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

- 2pts** 1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et que : $(\forall x \in]0;1[) ; |f'(x)| \leq \frac{1}{4}$
- 1,5pts** 2) Montrer que l'équation : $f(x) = x$ admet une solution unique α dans $[0; +\infty[$ et que : $0 < \alpha < 1$.
- 1pt** 3) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_n \leq 1$
- 1,5pts** 4) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|$
- 1,5pts** 5) En déduire que la suite (u_n) est convergente déterminer sa limite.

Exercice2 (12,5 pts) :

Partie A :

- 1,5pts** 1) a- En appliquant le théorème des accroissements finis, montrer que : $(\forall t \in]0, +\infty[) : 0 < t - \arctan t < t^3$
- 0,5pt** b- En déduire que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t - \arctan t}{t^2}$
- 1pt** 2) a-Montrer que : $(\forall x \in]0, +\infty[) : \arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$
- 1pt** b- En déduire que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x-1)^2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\pi}{2}}{x} = -1 - \pi$

Partie B :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^{**}$ par : $g(x) = 2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x-1}{x^2+1}$

- 1pt** 1) Etudier les variations de g .
- 1pt** 2) En déduire que : $(\forall x \in]0, +\infty[) : g(x) > 0$

Partie C :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :
$$\begin{cases} f(x) = (x-1)^2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ f(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

- 0,5p 1) a- Montrer que f est continue à droite en 0.
1p b- Etudier la dérivabilité de f à droite en 0
1pt 2) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
1pt 3) a- Montrer que : $(\forall x \in]0, +\infty[) : f'(x) = (x-1)g(x)$
1pt b- En déduire le tableau de variation de f .
1p 4) Montrer que la courbe (C) admet une asymptote d'équation $y = x - 2$ au voisinage de $+\infty$
1p 5) Tracer la courbe représentative (C) dans le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

WWW.GUESSMATHS.CO