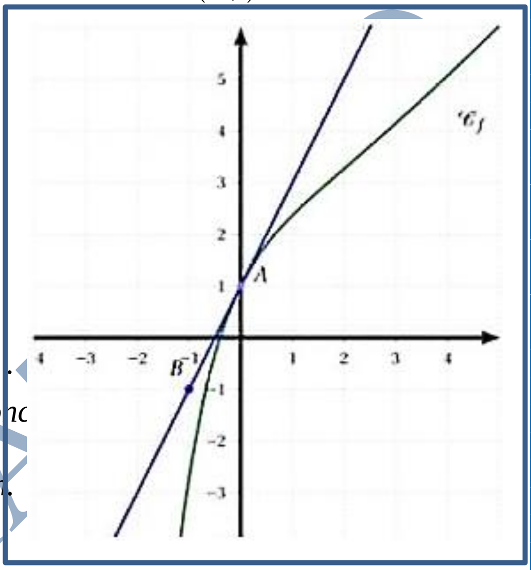
EXERCICE 1

Sur le graphique ci-contre, on a trace, dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$; la courbe $\left(C_f\right)$ représentative de la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$; et la droite $\left(AB\right)$ tangente à la courbe $\left(C_f\right)$ en $A\left(0;1\right)$.

Le point B a pour coordonnées $\left(-1;-1\right)$.



Partie A

En utilisant les données de l'énoncé, déterminer la valeur des réels a et b tels que: $\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)$; $f\left(x\right)=ax+b+\dfrac{x}{e^x}$

Partie B

Pour la suite, on admet que $f\left(x\right)=x+1+\dfrac{x}{e^x}$; Pour tout réel x.

1) Soit g la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par : $g\left(x\right)=1-x+e^x$.

Dresser, en le justifiant, le tableau donnant les variations de la fonc g sur $\mathbb{R}$.

Calculer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.

2) En déduire le signe de $g\left(x\right)$.

3) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)$.

4) On appelle f' la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Démontrer que pour tout réel x ; $f\left(x\right)=e^{-x}g\left(x\right)$.

5) En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

6) Démontrer que l'équation $f\left(x\right)=0$ admet une unique solution réelle α sur $\mathbb{R}$.

Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}

7) Soit $\left(D\right)$ la droite d'équation $y=x+1$.

a- Montrer qu'il existe une unique tangente à la courbe $\left(C_f\right)$ parallèle à $\left(D\right)$, en un point E dont on précisera les coordonnées.

b- Etudier la position relative de la courbe $\left(C_f\right)$ et de la droite $\left(D\right)$.

EXERCICE2.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right[$ par : $f(x)=\dfrac{1}{1-\tan(x)}$.

1) Montrer que f réalise une bijection de $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right[$ sur un intervalle que l'on précisera.

2) On désigne par g sa fonction réciproque.

Construire dans le même repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ les courbes $\left(C_f\right)$ et $\left(C_g\right)$.

3) Montrer que g est dérivable sur l'intervalle $\left[1;+\infty\right[$ et que : $g'\left(x\right)=\dfrac{1}{2x^2-2x+1}$.

4) a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ l'équation $f\left(x\right)=n$ admet dans $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right[$ une solution unique α_n .

b) Montrer que la suite $\left(\alpha_n\right)$ est croissante.

c) En déduire que $\left(\alpha_n\right)$ est convergente et calculer sa imite.

EXERCICE 3.

Partie I

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{2+\cos x} dx$.

2) $\int_0^{2} \frac{1}{(x+2)\sqrt{x+1}} dx$

Partie II

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}^*$ *par :* $F(x)=\int_x^{x+1} \frac{e^t}{t+1} dt$

1) *Montrer que ma fonction* $f: t \mapsto \frac{e^t}{t+1}$ *est strictement croissante sur* $[0;+\infty[$.
2) *Monter que la fonction F est dérivable sur* $[0;+\infty[$ *; puis déterminer* $F'(x)$ *pour tout réel x de* $[0;+\infty[$.
3) *Montrer que :* $(\forall x \in [0;+\infty[)$ *;* $f(x) \leq F(x)$.

EXERCICE 4.

On note $\mathbb{C}$ *l'ensemble des nombres complexes.*

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$. *On prendra comme unité 2 cm sur chaque axe. Le graphique sera fait sur une feuille de papier millimétré et complété au fur et à mesure des questions*

On considère l'application f qui à tout nombre complexe z associe : $f(z)=z^2+2z+9$.

1) *Calculer l'image de* $-1+i\sqrt{3}$ *par l'application f.*

2) *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation* $f(z)=5$.

Ecrire sous forme exponentielle les solutions de cette équation.
Construire alors sur le graphique, à la règle et au compas, les points A et B dont les affixe sont les solution de l'équation.
(A étant le point dont l'affixe a une partie imaginaire positive).
On laissera les traits de construction apparents.

3) *Soit* λ *un nombre réel.*

On considère l'équation $f(z)=\lambda$ *d'inconnue z.*

Déterminer l'ensemble des valeurs de λ *pour lesquelles l'équation* $f(z)=\lambda$ *admet deux solutions complexes conjuguées.*

4) *Soit* (F) *l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie :* $|f(z)-8|=3$

Prouver que (F) *est le cercle de centre* Ω *d'affixe* -1 *et de rayon* $\sqrt{3}$.

Tracer (F) *sur le graphique.*

5) *Soit z un nombre complexe, tel que :* $z=x+iy$ *ou x et y sont des nombres réels*

a) *Montrer que la forme algébrique de* $f(z)$ *est* $x^2-y^2+2x+9+i(2xy+2y)$.

b) *On note* (E) *l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que* $f(z)$ *soit un nombre réel.*

Montrer que (E) *est la réunion de deux droites* D_1 *et* D_2 *dont on précisera les équations.*

Compléter le graphique en traçant ces droites.

6) *Déterminer les coordonnées des points d'intersection des ensembles* (E) *et* (F).